수능완성

수학영역 | **수학 Ⅰ · 수학 Ⅱ · 확률과 통계**

정답과 **풀이**

EBS 수능완성 수학영역

한눈에 보는 정답

01 지수함수와 로그함수

정답 본문 8~17쪽

01 ③	02 ②	03 81	04 ③	05 ①
06 22	07 ③	08 ④	09 ①	10 ⑤
11 36	12 ③	13 8	14 ②	15 6
16 8	17 ③	18 9	19 ④	20 ④
21 9	22 16	23 3	24 ④	25 7
26 2	27 22	28 ①	29 ②	30 ③

02 삼각함수

정답 본문 20~29쪽

01 50	02 ③	03 ⑤	04 24	05 ④
06 ②	07 ①	08 ③	09 ④	10 7
11 8	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ③
16 ③	17 ②	18 ③	19 5	20 ④
21 ⑤	22 ③	23 ③	24 33	25 7
26 ②	27 ②	28 ③	29 ④	30 49
31 ②	32 ③			

03 수열

정답 본문 32~43쪽

01 ④	02 ②	03 ④	04 ②	05 ③
06 ②	07 ③	08 ③	09 ⑤	10 ②
11 ③	12 ①	13 ②	14 ②	15 ⑤
16 ②	17 ②	18 ④	19 340	20 ③
21 ②	22 ④	23 ②	24 ③	25 ①
26 ②	27 ①	28 ②	29 ④	30 ③
31 ③	32 ②	33 77	34 50	

04 함수의 극한과 연속

정답 본문 46~57쪽

01 ②	02 ③	03 ③	04 ③	05 ①
06 ①	07 ②	08 40	09 ⑤	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 10	14 7	15 ⑤
16 ⑤	17 ④	18 ④	19 18	20 ④
21 ④	22 ⑤	23 ①	24 ④	25 ④
26 ⑤	27 13	28 ①	29 ①	30 ③
31 ③	32 ②	33 ②	34 ④	35 ②
36 16	37 ③	38 ⑤		

05 다항함수의 미분법

정답 본문 61~73쪽

01 ⑤	02 ①	03 ⑤	04 ③	05 ④
06 ③	07 ③	08 11	09 ③	10 ③
11 ⑤	12 ②	13 ③	14 ③	15 ④
16 ①	17 ⑤	18 ⑤	19 ③	20 ④
21 ②	22 ④	23 ③	24 ④	25 ⑤
26 ⑤	27 689	28 121	29 ③	30 ①
31 ②	32 2	33 ④	34 ③	35 ⑤
36 ②	37 ⑤	38 ③	39 ①	40 ⑤
41 6				

06 다항함수의 적분법

정답 본문 76~85쪽

01 ②	02 ③	03 ②	04 ④	05 95
06 32	07 108	08 ③	09 ③	10 ①
11 ①	12 ④	13 ③	14 ②	15 ①
16 ④	17 ④	18 ④	19 ④	20 ②
21 ⑤	22 ③	23 ④	24 6	25 37
26 5	27 ②	28 426	29 ②	30 ③
31 127				

07 경우의 수

정답 본문 88~98쪽

01 12	02 ③	03 ①	04 ⑤	05 72
06 ⑤	07 ①	08 ⑤	09 ④	10 ③
11 20	12 ②	13 ②	14 ①	15 ②
16 60	17 20	18 ①	19 ⑤	20 186
21 ③	22 10	23 ①	24 ②	25 186
26 ③	27 ⑤	28 ②	29 30	30 ③
31 14	32 ③	33 45	34 ②	

08 확률

정답 본문 101~113쪽

01 ④	02 ③	03 ③	04 ②	05 ②
06 ②	07 ①	08 ①	09 ⑤	10 ④
11 ②	12 57	13 ④	14 ③	15 ③
16 ③	17 19	18 ④	19 43	20 ⑤
21 ②	22 ③	23 ⑤	24 ③	25 ④
26 ⑤	27 ④	28 ②	29 ②	30 ③
31 ②	32 ①	33 ②	34 47	35 ⑤
36 ③	37 ③	38 302	39 551	

09 통계

정답 본문 116~128쪽

01 ①	02 ②	03 46	04 ②	05 ③
06 ②	07 ⑤	08 ④	09 329	10 ④
11 ①	12 ①	13 ③	14 ④	15 ⑤
16 ④	17 ③	18 ②	19 ⑤	20 ③
21 ③	22 ④	23 ①	24 ②	25 ②
26 ①	27 ①	28 ⑤	29 ④	30 ⑤
31 ⑤	32 ①	33 ④	34 ③	35 ②
36 ③	37 ④	38 ④	39 97	

EBS 수능완성 수학영역

한눈에 보는 정답

실전편

실전 모의고사 1회

본문 130~137쪽

01 ⑤	02 ③	03 ①	04 ①	05 ⑤
06 ①	07 ③	08 ③	09 ②	10 ②
11 ②	12 ④	13 ④	14 ⑤	15 ③
16 8	17 29	18 4	19 14	20 9
21 383	22 31	23 ③	24 ④	25 ②
26 ①	27 ⑤	28 ②	29 244	30 94

실전 모의고사 2회

본문 138~145쪽

01 ④	02 ④	03 ②	04 ③	05 ③
06 ①	07 ①	08 ②	09 ②	10 ③
11 ②	12 ①	13 ⑤	14 ④	15 ⑤
16 60	17 10	18 80	19 8	20 35
21 330	22 32	23 ④	24 ①	25 ②
26 ③	27 ③	28 ④	29 23	30 323

실전 모의고사 3회

본문 146~153쪽

01 ②	02 ⑤	03 ④	04 ⑤	05 ②
06 ①	07 ②	08 ③	09 ③	10 ②
11 ②	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ③
16 11	17 7	18 9	19 12	20 68
21 11	22 550	23 ③	24 ②	25 ②
26 ①	27 ⑤	28 ②	29 11	30 334

실전 모의고사 4회

본문 154~161쪽

01 ④	02 ③	03 ②	04 ③	05 ①
06 ④	07 ③	08 ②	09 ③	10 ③
11 ②	12 ③	13 ②	14 ⑤	15 ③
16 10	17 7	18 33	19 7	20 612
21 25	22 120	23 ②	24 ③	25 ①
26 ④	27 ⑤	28 ①	29 112	30 585

실전 모의고사 5회

본문 162~168쪽

01 ②	02 ①	03 ②	04 ①	05 ①
06 ③	07 ①	08 ④	09 ⑤	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 ②	14 ③	15 ③
16 55	17 32	18 12	19 30	20 424
21 12	22 150	23 ⑤	24 ③	25 ④
26 ①	27 ②	28 ⑤	29 217	30 243

01 지수함수와 로그함수

정답 본문 8~17쪽

01 ③	02 ②	03 81	04 ③	05 ①
06 22	07 ③	08 ④	09 ①	10 ⑤
11 36	12 ③	13 8	14 ②	15 6
16 8	17 ③	18 9	19 ④	20 ④
21 9	22 16	23 3	24 ④	25 7
26 2	27 22	28 ①	29 ②	30 ③

01

$(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^2=\sqrt[3]{(\sqrt{2})^2}=\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[6]{4}=\sqrt[3\times 2]{2^2}=\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^3}}=\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2})^3}=\sqrt[3]{2}$

따라서 $\dfrac{(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^2+\sqrt[6]{4}+\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=3$

답 ③

02

a의 세제곱근 중 실수를 x라 하면 x는 8의 여섯제곱근 중 음의 실수이므로

$x=-\sqrt[6]{8}=-\sqrt[2\times 3]{2^3}=-\sqrt{2}$

따라서 $a=x^3=(-\sqrt{2})^3=-2\sqrt{2}$ …… ㉠

또한 b의 제곱근 중 양의 실수를 y라 하면 y는 $\sqrt[4]{8}$의 세제곱근이므로

$y=\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[4]{2}$

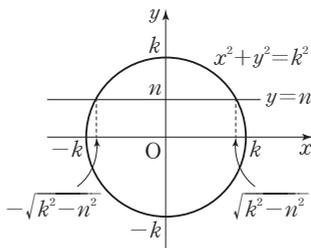
따라서 $b=y^2=(\sqrt[4]{2})^2=\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a+b=-2\sqrt{2}+\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

답 ②

03

원 $x^2+y^2=k^2$ $(k>2)$ 위의 점 중 y좌표가 1보다 큰 자연수인 점들의 집합이 A이므로 $(a,\ n)\in A$이면 $x^2=k^2-y^2$에서 $a^2=k^2-n^2$, 즉 $a=\pm\sqrt{k^2-n^2}$이다.

(ⅰ) n이 $2\le n<k$인 짝수일 때

$a=\pm\sqrt{k^2-n^2}$이므로

$\sqrt{k^2-n^2}$의 n제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$, $-\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$

$-\sqrt{k^2-n^2}$의 n제곱근 중 실수는 없다.

따라서 a의 n제곱근 중 양의 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$의 1개이다.

(ⅱ) n이 $3\le n<k$인 홀수일 때

$a=\pm\sqrt{k^2-n^2}$이므로

$\sqrt{k^2-n^2}$의 n제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$

$-\sqrt{k^2-n^2}$의 n제곱근 중 실수는 $\sqrt[n]{-\sqrt{k^2-n^2}}$

따라서 a의 n제곱근 중 양의 실수는 $\sqrt[n]{\sqrt{k^2-n^2}}$의 1개이다.

(ⅲ) $n=k$일 때

$a=0$이므로 0의 n제곱근은 0뿐이다.

따라서 a의 n제곱근 중 양의 실수는 없다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $2\le n<k$인 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중 양의 실수는 하나씩 생기고 모두 서로 다르다.

따라서 집합 B의 원소의 개수가 7이므로

$8<k\le 9$일 때 $n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$에서 집합 B의 원소의 개수가 하나씩 생기므로 k^2의 최댓값은 $9^2=81$이다.

답 81

참고

(1) $A=\{(a,\ n)\,|\,a^2+n^2=k^2$, n은 1보다 크고 k보다 작거나 같은 자연수$\}$

(2) $2\le n_1<n_2<k$ (n_1, n_2는 자연수)일 때

$a_1=\sqrt{k^2-{n_1}^2}$, $a_2=\sqrt{k^2-{n_2}^2}$이면 $0<a_2<a_1$이고 $\sqrt[n_2]{a_2}<\sqrt[n_1]{a_1}$이다.

즉, $\sqrt[n_2]{a_2}\ne\sqrt[n_1]{a_1}$이다.

04

$27^{-1}\div\left(\frac{1}{9}\times\sqrt[3]{81}\right)^{\frac{9}{2}}=(3^3)^{-1}\div\left(3^{-2}\times 3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}$

$=3^{-3}\div\left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{2}}$

$=3^{-3}\div 3^{-3}=3^{-3-(-3)}$

$=3^0=1$

답 ③

05

$2^{a+\frac{b}{2}}=\frac{1}{3}$, $2^{a-\frac{b}{2}}=27$에서 변끼리 곱하면

$2^{a+\frac{b}{2}}\times 2^{a-\frac{b}{2}}=\frac{1}{3}\times 27$

$2^{\left(a+\frac{b}{2}\right)+\left(a-\frac{b}{2}\right)}=9$, $2^{2a}=3^2$

$2^a=(2^{2a})^{\frac{1}{2}}=(3^2)^{\frac{1}{2}}=3$

또한 $2^{a+\frac{b}{2}}=\frac{1}{3}$에서 $2^{\frac{b}{2}}=\frac{1}{2^a}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$2^b=\left(2^{\frac{b}{2}}\right)^2=\left(\frac{1}{9}\right)^2=3^{-4}$

따라서

$\sqrt{2^{3a}}\times\sqrt[3]{2^b}=(2^a)^{\frac{3}{2}}\times(2^b)^{\frac{1}{3}}$

$=3^{\frac{3}{2}}\times 3^{-\frac{4}{3}}$

$=3^{\frac{3}{2}+\left(-\frac{4}{3}\right)}=3^{\frac{1}{6}}$

답 ①

06

$9^x-3^{x+\frac{10}{n}}=-1$

$(3^x)^2-3^{x+\frac{10}{n}}=-1$의 양변을 3^x으로 나누면

$3^x-3^{\frac{10}{n}}=-3^{-x}$이므로 $3^x+3^{-x}=3^{\frac{10}{n}}$

$9^x+9^{-x}-2=(3^x+3^{-x})^2-4=\left(3^{\frac{10}{n}}\right)^2-4=3^{\frac{20}{n}}-4$

$3^{\frac{20}{n}}-4$의 값이 자연수가 되려면 $3^{\frac{20}{n}}$의 값이 4보다 큰 자연수가 되어야 한다.

$3^{\frac{20}{n}}$의 값이 자연수가 되려면 $\frac{20}{n}$이 음이 아닌 정수이어야 하므로 n은 1, 2, 4, 5, 10, 20이고 $n=20$일 때 $3^{\frac{20}{n}}=3$으로 4보다 작다.

따라서 n은 1, 2, 4, 5, 10이므로 그 합은

$1+2+4+5+10=22$

답 22

07

밑의 조건에서 $|a+3|>0$, $|a+3|\neq1$이므로

$a\neq-4$, $a\neq-3$, $a\neq-2$ ⋯⋯ ㉠

진수의 조건에서 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax-a+3>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+ax-a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(-a+3)<0$, $a^2+4a-12<0$

$(a+6)(a-2)<0$

$-6<a<2$ ⋯⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 만족시키는 정수 a의 값은 -5, -1, 0, 1이므로 그 합은

$-5+(-1)+0+1=-5$

답 ③

08

$$\log_2 30-\log_2\frac{3}{2}-\log_2\frac{5}{4}=\log_2\left(30\div\frac{3}{2}\div\frac{5}{4}\right)$$
$$=\log_2\left(30\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\right)$$
$$=\log_2 16=\log_2 2^4$$
$$=4\log_2 2=4$$

답 ④

09

$a^2b^{-3}=1$의 양변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b a^2b^{-3}=\log_b 1$이므로 $\log_b a^2+\log_b b^{-3}=0$

$2\log_b a=3$, $\log_b a=\frac{3}{2}$

$\log_b(a^m\times\sqrt{b^n})=m\log_b a+\frac{n}{2}=\frac{3m+n}{2}=10$

$3m+n=20$을 만족시키는 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은

$(1, 17)$, $(2, 14)$, $(3, 11)$, $(4, 8)$, $(5, 5)$, $(6, 2)$

이므로 $m+n$의 최솟값은 $6+2=8$이다.

답 ①

10

$\left(4^{\log_2\frac{1}{3}}\right)^{\log_3\frac{1}{6}}=4^{\log_2\frac{1}{3}\times\log_3\frac{1}{6}}$

이때

$$\log_2\frac{1}{3}\times\log_3\frac{1}{6}=\log_2 3^{-1}\times\log_3 6^{-1}$$
$$=(-\log_2 3)\times(-\log_3 6)$$
$$=\log_2 3\times\log_3 6$$
$$=\log_2 3\times\frac{\log_2 6}{\log_2 3}$$
$$=\log_2 6$$

따라서 $\left(4^{\log_2\frac{1}{3}}\right)^{\log_3\frac{1}{6}}=4^{\log_2\frac{1}{3}\times\log_3\frac{1}{6}}=4^{\log_2 6}=6^{\log_2 4}=6^2=36$

답 ⑤

다른 풀이

$4^{\log_2\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2 4}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$이므로

$\left(4^{\log_2\frac{1}{3}}\right)^{\log_3\frac{1}{6}}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3\frac{1}{6}}=\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_3\frac{1}{9}}=\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_3 3^{-2}}=\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}=6^2=36$

11

$\frac{1}{\log_2 a}=\log_a 2$, $\frac{1}{\log_3 a}=\log_a 3$, $\log_{25}a=\log_{5^2}a=\frac{1}{2}\log_5 a$

이므로

$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_3 a}+\frac{\log_{25}a}{\log_5 a}=\log_a 2+\log_a 3+\frac{1}{2}=1$

$\log_a 2+\log_a 3=\frac{1}{2}$

$\log_a 6=\frac{1}{2}$, $a^{\frac{1}{2}}=6$

따라서 $a=6^2=36$

답 36

12

조건 (가)에서 $\sqrt{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt[5]{c}=k$라 하면 $a=k^2$, $b=k^3$, $c=k^5$이다.

이를 조건 (나)에 대입하면

$$\log_2\frac{bc}{a}=\log_2\left(\frac{k^3\times k^5}{k^2}\right)$$
$$=\log_2 k^6$$
$$=6\log_2 k=3$$

에서

$\log_2 k=\frac{1}{2}$

$$\log_2 a\times\log_m b\times\log_n c=\log_2 a\times\frac{\log_2 b}{\log_2 m}\times\frac{\log_2 c}{\log_2 n}$$
$$=\log_2 k^2\times\frac{\log_2 k^3}{\log_2 m}\times\frac{\log_2 k^5}{\log_2 n}$$
$$=2\times3\times5\times(\log_2 k)^3\times\frac{1}{\log_2 m}\times\frac{1}{\log_2 n}$$
$$=2\times3\times5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{\log_2 m}\times\frac{1}{\log_2 n}$$
$$=1$$

에서 $\log_2 m\times\log_2 n=\frac{15}{4}$

$m>1$, $n>1$에서 $\log_2 m>0$, $\log_2 n>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\log_2 m+\log_2 n \ge 2\sqrt{\log_2 m \times \log_2 n}$

(단, 등호는 $\log_2 m=\log_2 n$일 때 성립한다.)

$\log_2 mn \ge 2\sqrt{\dfrac{15}{4}}$

$\log_2 mn \ge \sqrt{15}$

따라서 $\log_2 mn$의 최솟값은 $\sqrt{15}$이다.

답 ③

13

두 점 B, C의 x좌표를 각각 b, c $(0<b<c)$라 하면

$\overline{AB} : \overline{BC}=1 : 2$이므로

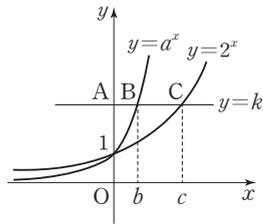
$c=3b$ …… ㉠

두 점 B, C의 y좌표는 서로 같으므로

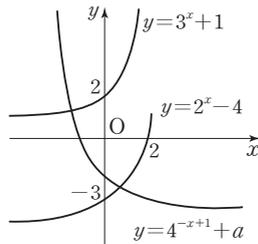
$a^b=2^c$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a^b=2^{3b}=8^b$ …… ㉢

따라서 $a>2$, $b>0$이므로 ㉢에서 $a=8$

답 8

14

두 곡선 $y=3^x+1$, $y=2^x-4$는 다음과 같다.

$f(x)=4^{-x+1}+a$라 하면

곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=3^x+1$과 제2사분면에서 만나려면

$f(0)=4+a<2$

$a<-2$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=2^x-4$와 제4사분면에서 만나려면

$f(0)=4+a>-3$, $f(2)=4^{-1}+a<0$

즉, $-7<a<-\dfrac{1}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-7<a<-2$이므로 정수 a는 -6, -5, -4, -3의 4개이다.

답 ②

15

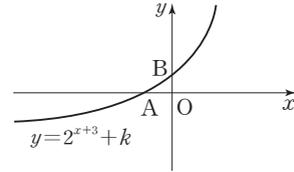
$f(x)=2^{x+3}+k$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축이 서로 만나려면 $k<0$이다.

선분 OA의 길이가 자연수일 때 점 A의 x좌표를 a (a는 0이 아닌 정수)라 하면

$0=2^{a+3}+k$에서 $k=-2^{a+3}$ …… ㉠

점 B의 y좌표를 b라 하면

$b=2^{0+3}+k$

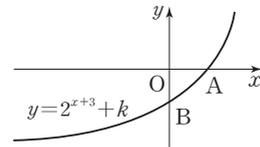
$b=8+k$ …… ㉡

(i) $a<0$일 때

음의 정수 a의 값에 따라 ㉠, ㉡에서 각각 k, b의 값이 다음 표와 같이 결정된다.

a	-1	-2	-3	-4	…
k	-4	-2	-1	$-\dfrac{1}{2}$	…
b	4	6	7	$\dfrac{15}{2}$	…

삼각형 AOB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{BO}=\dfrac{1}{2}\times(-a)\times b=-\dfrac{ab}{2}$

이므로 삼각형 AOB의 넓이의 최솟값은 $k=-4$일 때 2이다.

(ii) $a>0$일 때

양의 정수 a의 값에 따라 ㉠, ㉡에서 각각 k, b의 값이 다음 표와 같이 결정된다.

a	1	2	3	4	…
k	-16	-32	-64	-128	…
b	-8	-24	-56	-120	…

삼각형 AOB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{BO}=\dfrac{1}{2}\times a\times(-b)=-\dfrac{ab}{2}$

이므로 삼각형 AOB의 넓이의 최솟값은 $k=-16$일 때 4이다.

(i), (ii)에서 삼각형 AOB의 넓이의 최솟값은 $k=-4$일 때 2이므로

$S=2$, $s=-4$이다.

따라서 $S-s=2-(-4)=6$

답 6

16

$9^{x+1}=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-x}+24$에서 $9\times9^x=9^x+24$

$(9-1)\times9^x=24$, $8\times9^x=24$

$9^x=3$, $3^{2x}=3$

$2x=1$에서 $x=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$이므로

$6a+5=6\times\dfrac{1}{2}+5=8$

답 8

17

$2^x \times 4^{x^2-\frac{5}{2}x} = 2^x \times 2^{2\left(x^2-\frac{5}{2}x\right)} = 2^{2x^2-4x}$

$2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^{x-3} = 2 \times 2^{-3(x-3)} = 2^{-3x+10}$

이므로 주어진 부등식은 $2^{2x^2-4x} \le 2^{-3x+10}$

이때 밑이 1보다 크므로

$2x^2-4x \le -3x+10$

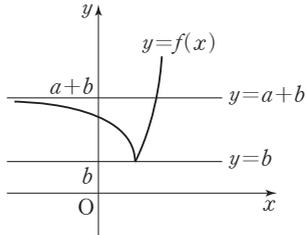
$2x^2-x-10 \le 0$, $(2x-5)(x+2) \le 0$

$-2 \le x \le \frac{5}{2}$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2이므로 그 개수는 5이다.

답 ③

18

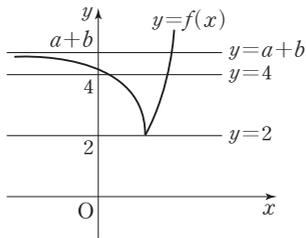
$f(x)=|3^x-a|+b$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

$4^{f(x)}-5\times 2^{f(x)+2}+64=0$

$(2^{f(x)})^2-20\times 2^{f(x)}+64=0$, $(2^{f(x)}-4)(2^{f(x)}-16)=0$

$2^{f(x)}=4$ 또는 $2^{f(x)}=16$

$f(x)=2$ 또는 $f(x)=4$

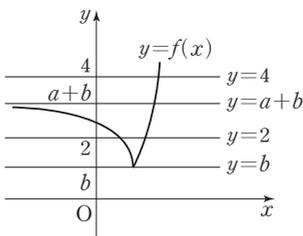
(i) $b=2$일 때

직선 $y=2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 한 점에서만 만난다.

방정식 $4^{f(x)}-5\times 2^{f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$a+b>4$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(5, 2)$, $\cdots$, $(9, 2)$의 7개이다.

(ii) $b\ne 2$일 때

조건을 만족시키려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.

방정식 $4^{f(x)}-5\times 2^{f(x)+2}+64=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$는 한 점에서만 만나야 하므로

$b<2$, $2<a+b\le 4$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(3, 1)$의 2개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$7+2=9$

답 9

19

함수 $y=\log_2(2x+a)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $y=\log_2\{2(x-3)+a\}+b$의 그래프와 같다.

함수 $y=\log_2\left\{2\left(x-3+\frac{a}{2}\right)\right\}+b$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=3-\frac{a}{2}$이므로

$3-\frac{a}{2}=-2$에서 $a=10$

또한 함수 $y=\log_2(2x+4)+b$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\log_2 4+b$에서 $b=-2$

따라서 $a+b=10+(-2)=8$

답 ④

20

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면

$\log_4 a=\log_8 b$

$\frac{1}{2}\log_2 a=\frac{1}{3}\log_2 b$

$\frac{3}{2}\log_2 a=\log_2 b$

$b=a^{\frac{3}{2}}$

두 점 B, C의 x좌표는 서로 같으므로 두 점 A, C의 좌표는 각각

$(a, \log_4 a)$, $\left(a^{\frac{3}{2}}, \log_4 a^{\frac{3}{2}}\right)$이다.

두 직선 OA, OC의 기울기가 서로 같으므로

$\frac{\log_4 a}{a}=\frac{\log_4 a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}$

$a^{\frac{3}{2}}\times\log_4 a=a\times\log_4 a^{\frac{3}{2}}$

$a^{\frac{1}{2}}\times a\times\log_4 a=\frac{3}{2}\times a\times\log_4 a$

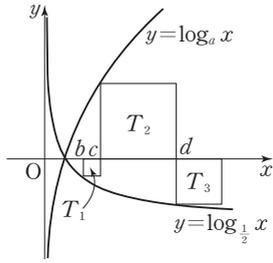
$a^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$

$a=\frac{9}{4}$

따라서 $k=\log_4\frac{9}{4}=\log_2\frac{3}{2}=-1+\log_2 3$

답 ④

21

그림과 같이 3개의 정사각형 T_1, T_2, T_3 각각의 x축 위에 있는 두 꼭짓점 중 x좌표의 값이 작은 점의 x좌표를 각각 b, c, d라 하자.

정사각형 T_1의 한 변의 길이가 1이므로

$\log_{\frac{1}{2}} b=-1,\ b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

정사각형 T_3의 한 변의 길이가 3이므로

$\log_{\frac{1}{2}} d=-3,\ d=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$

$c=b+1=2+1=3$이고 $d-c=8-3=5$이므로

정사각형 T_2의 한 변의 길이는 5이다.

$\log_a 3=5$에서 $a^5=3$

따라서 $a^{10}=3^2=9$

답 9

22

진수는 0보다 커야 하므로

$4x+11>0,\ x+1>0$

즉, $x>-\frac{11}{4}$, $x>-1$이므로 $x>-1$ ...... ㉠

주어진 방정식에서

$\log_3(4x+11)=\log_3 3(x+1)^2$

$4x+11=3x^2+6x+3$

$3x^2+2x-8=0,\ (x+2)(3x-4)=0$

따라서 $x=-2$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

그런데 ㉠에서 $x>-1$이므로 $x=\frac{4}{3}$

$a=\frac{4}{3}$이므로 $12a=12\times\frac{4}{3}=16$

답 16

23

$\log_2(x+3)+\log_2(5-x)=a$ ...... ㉠

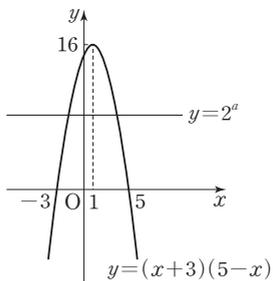
㉠에서 진수는 0보다 커야 하므로

$-3<x<5$

$\log_2(x+3)(5-x)=a$

$(x+3)(5-x)=2^a$ ...... ㉡

이차방정식 ㉡이 $-3<x<5$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면

곡선 $y=(x+3)(5-x)$와 직선 $y=2^a$이 $-3<x<5$에서 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$y=(x+3)(5-x)=-(x-1)^2+16$은 $x=1$에서 최댓값 16을 가지므로 그림과 같이 $0<2^a<16=2^4$이어야 한다. 즉, $a<4$

따라서 정수 a의 최댓값은 3이다.

답 3

24

$\log_{\frac{1}{2}}[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\ge-5$

$-\log_2[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\ge-5$

$\log_2[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\le5$

진수는 0보다 커야 하므로 $\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}>0$

즉, $f(x)<2$ 또는 $f(x)>6$ ...... ㉠

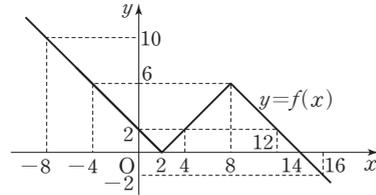
$\log_2[\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}]\le5$에서

$\{f(x)-2\}\{f(x)-6\}\le2^5=32$

$\{f(x)\}^2-8f(x)-20\le0,\ \{f(x)+2\}\{f(x)-10\}\le0$

$-2\le f(x)\le10$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $f(x)$의 값의 범위는

$-2\le f(x)<2$ 또는 $6<f(x)\le10$

$-8\le x<-4$ 또는 $0<x<4$ 또는 $12<x\le16$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 $-8,\ -7,\ -6,\ -5,\ 1,\ 2,\ 3,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16$이므로 그 개수는 11이다.

답 ④

25

함수 $f(x)$는 밑이 1보다 큰 로그함수이고, 함수 $g(x)$는 밑이 1보다 큰 지수함수이므로 함수 $f(x)$와 3보다 큰 모든 실수 x에 대하여 $(g\circ f)(x)=x$를 만족시키는 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$y=\log_9(x-3)+2$의 역함수를 구하면

$y-2=\log_9(x-3)$

$x-3=9^{y-2},\ x=9^{y-2}+3$

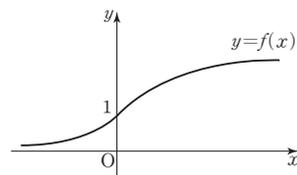
$x,\ y$를 서로 바꾸면 $y=9^{x-2}+3=3^{2x-4}+3$

따라서 $a=2,\ b=3$이므로

$2a+b=2\times2+3=7$

답 7

26

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

$x<0$일 때, $0<f(x)<1$이고 $x\ge0$일 때, $f(x)\ge1$이다.

$g\left(\frac{1}{16}\right)=k\ (k<0)$이라 하면 $f(k)=\frac{1}{16}<1$이므로

$f(k)=4^k=\frac{1}{16}=4^{-2}$에서 $k=-2$

$a\geq1$이므로 $g(a)=2$

$f(2)=a$

따라서 $a=\log_3(2+1)+1=\log_3 3+1=2$

답 2

다른 풀이

$y=4^x$의 역함수를 구하자.

$x=\log_4 y$

x, y를 서로 바꾸면

$y=\log_4 x$

$y=\log_3(x+1)+1$의 역함수를 구하자.

$y-1=\log_3(x+1)$, $x+1=3^{y-1}$

$x=3^{y-1}-1$

x, y를 서로 바꾸면

$y=3^{x-1}-1$

또한 $x<0$일 때, $0<f(x)<1$이고 $x\geq0$일 때, $f(x)\geq1$이므로 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases}\log_4 x & (0<x<1)\\ 3^{x-1}-1 & (x\geq1)\end{cases}$$

$\left|g\left(\frac{1}{16}\right)\right|=|g(a)|$이므로

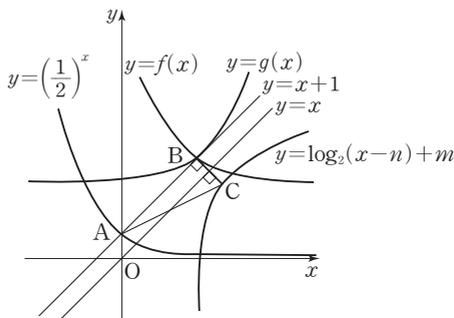
$-\log_4\frac{1}{16}=3^{a-1}-1$, $2=3^{a-1}-1$, $3^{a-1}=3$

따라서 $a=2$

27

점 A의 좌표는 $(0, 1)$이므로 점 B의 좌표는 $(m, 1+n)$이다.

점 B는 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 $1+n=m+1$에서 $m=n$이다.

함수 $y=2^x$의 그래프도 y축과 점 A에서 만나므로 $g(x)=2^{x-m}+n$이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프도 점 $B(m, 1+n)$을 지난다. 또한 함수 $y=g(x)$의 역함수가 $y=\log_2(x-n)+m$이고 기울기가 -1인 직선이 두 함수 $y=g(x)$, $y=\log_2(x-n)+m$의 그래프와 만나는 점이 각각 B, C이므로 두 점 B, C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(m, m+1)$, $(m+1, m)$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

두 직선 AB, BC의 기울기의 곱은 -1이므로 삼각형 ABC에서 $\angle B=90°$이다.

$m>0$이고 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}m\times\sqrt{2}=m=6$

따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}+6$이므로

$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+6=16+6=22$

답 22

28

$g(x)=x^2-x+\frac{3}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$이라 하면

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $g(x)$는

최댓값 $g(-2)=\left(-2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{27}{4}$,

최솟값 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$을 가진다.

이때 함수 $f(x)$에서 로그의 밑은 1보다 크므로

$M=\log_2\frac{27}{4}$, $m=\log_2\frac{1}{2}=-1$

$(2^M)^m=\left(2^{\log_2\frac{27}{4}}\right)^{-1}=\left(\frac{27}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{27}$

답 ①

29

$0<\frac{a}{a+1}<1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값을 가진다.

$f(-2)=2\times\left(\frac{a}{a+1}\right)^{-2}=72$

$\left(\frac{a+1}{a}\right)^2=36$

$\frac{a+1}{a}=6$, $a+1=6a$에서 $a=\frac{1}{5}$

따라서 $f(x)=2\times\left(\frac{1}{6}\right)^x$이고 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값

$f(1)=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$을 가진다.

답 ②

30

(i) $-1<a<0$일 때

$0<a+1<1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{4}$일 때 최댓값을 가진다.

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_{(a+1)}\frac{1}{4}=2$

$(a+1)^2=\frac{1}{4}$, $a+1=\pm\frac{1}{2}$

$-1<a<0$이므로 $a=-\frac{1}{2}$

(ii) $a>0$일 때

$a+1>1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=16$일 때 최댓값을 가진다.

$f(16)=\log_{(a+1)}16=2$

$(a+1)^2=16$, $a+1=\pm4$

$a>0$이므로 $a=3$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 $-\frac{1}{2}$ 또는 3이므로 그 합은

$-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$

답 ③

02 삼각함수

정답 본문 20~29쪽

01 50	02 ③	03 ⑤	04 24	05 ④
06 ②	07 ①	08 ③	09 ④	10 7
11 8	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ③
16 ③	17 ②	18 ③	19 5	20 ④
21 ⑤	22 ③	23 ③	24 33	25 7
26 ②	27 ②	28 ③	29 ④	30 49
31 ②	32 ③			

01

부채꼴의 호의 길이가 2π이므로 $r\theta=2\pi$ …… ㉠

부채꼴의 넓이가 10π이므로 $\frac{1}{2}r^2\theta=10\pi$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $r=10$, $\theta=\frac{\pi}{5}$

따라서 $\frac{r\pi}{\theta}=\frac{10\pi}{\frac{\pi}{5}}=50$

답 50

02

부채꼴의 호의 길이를 l이라 하면

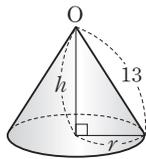
$l=13\times\frac{10}{13}\pi=10\pi$

원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면

$2\pi r=10\pi$에서 $r=5$

$5^2+h^2=13^2$에서 $h=\sqrt{13^2-5^2}=12$

따라서 원뿔의 부피는

$\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\times\pi\times5^2\times12=100\pi$

답 ③

03

$\angle AOB=\theta$, $\overline{OC}=a$, $\overline{CD}=b$라 하면

색칠한 두 영역의 넓이가 서로 같으므로

$\frac{1}{2}a^2\theta=\frac{1}{2}\times10^2\times\theta-\frac{1}{2}\times(a+b)^2\times\theta$

$a^2+(a+b)^2=10^2$

a, b는 모두 자연수이므로 $a=6$, $a+b=8$

세 호 CE, DF, AB의 길이의 합이 6π이므로

$6\theta+8\theta+10\theta=6\pi$, $24\theta=6\pi$, $\theta=\frac{\pi}{4}$

따라서 통로 CEFD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(a+b)^2\times\theta-\frac{1}{2}\times a^2\times\theta=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\times(8^2-6^2)=\frac{7}{2}\pi$

답 ⑤

04

$\sin\theta=\frac{b}{6}$, $\tan\theta=\frac{b}{a}$이므로 $\sin\theta\times\tan\theta=\frac{b}{6}\times\frac{b}{a}=\frac{b^2}{6a}$

따라서 $\frac{b^2}{6a}=\frac{5}{6}$에서 $b^2=5a$

또한 $a^2+b^2=6^2$이므로 $a^2+5a=36$

$a^2+5a-36=0$, $(a-4)(a+9)=0$

$a=4$ 또는 $a=-9$

그런데 $|a|\le6$이므로 $a=4$

$b^2=5a=5\times4=20$

따라서 $a+b^2=4+20=24$

답 24

05

$$\frac{\tan\theta}{1-\cos\theta}-\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta}=\tan\theta\left(\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{1}{1+\cos\theta}\right)$$
$$=\tan\theta\left\{\frac{1+\cos\theta-(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}\right\}$$
$$=\tan\theta\times\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$$

$\frac{2}{\sin\theta}=-8$에서 $\sin\theta=-\frac{1}{4}$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\frac{1}{16}}=-\frac{\sqrt{15}}{4}$

따라서

$(2\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta+2\cos\theta)^2$

$=4\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$+(\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta)$

$=5(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+8\sin\theta\cos\theta$

$=5\times1+8\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=5+\frac{\sqrt{15}}{2}$

답 ④

06

$\sin\theta\tan\theta<0$ …… ㉠

$\cos\theta\tan\theta>0$ …… ㉡

㉡에서 $\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}>0$이므로 $\sin\theta>0$ …… ㉢

㉠, ㉢에서 $\tan\theta<0$

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$이므로 각 θ는 제2사분면의 각이다.

또한 θ를 나타내는 동경과 3θ를 나타내는 동경이 서로 y축에 대하여 대칭이므로 $\theta+3\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)에서 $\theta=\frac{2n+1}{4}\pi$

그런데 θ는 제2사분면의 각이므로 양수 θ의 최솟값은

$n=1$일 때 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$

따라서 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\alpha=-1$이므로

$$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\tan\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{-1}=-\sqrt{2}$$

답 ②

07

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이고 $\cos\theta=\frac{4}{5}$이므로

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

따라서

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos(\pi+\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin(\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}=-7$$

답 ①

08

주어진 함수 $y=2\tan(ax+b)$의 그래프에서 주기는 $\frac{\pi}{6}$이므로

$\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{6}$이고 $a>0$이므로 $a=6$

$f(x)=2\tan(6x+b)$라 하면 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=0$이므로

$2\tan\left(6\times\frac{\pi}{12}+b\right)=0$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+b\right)=0$

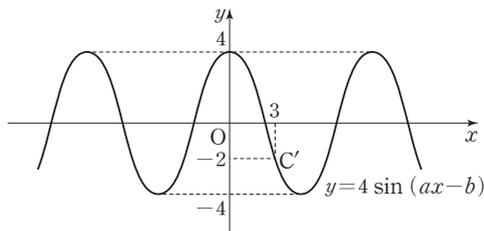
$0<b<\pi$이므로 $\frac{\pi}{2}<b+\frac{\pi}{2}<\frac{3}{2}\pi$

$b+\frac{\pi}{2}=\pi$에서 $b=\frac{\pi}{2}$

따라서 $ab=6\times\frac{\pi}{2}=3\pi$

답 ③

09

함수 $y=4\sin(ax-b)$의 그래프는 함수 $y=4\sin(ax-b)-1$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=4\sin(ax-b)$의 그래프는 그림과 같다.

함수 $y=4\sin(ax-b)-1$의 그래프가 점 C$(3, -3)$을 지나므로 함수 $y=4\sin(ax-b)$의 그래프는 점 C$'(3, -2)$를 지난다.

$f(x)=4\sin(ax-b)$라 하자.

$0<\alpha<3$일 때 $f(\alpha)=0$이면 $f(0)=4$, $f(3)=-2$이므로

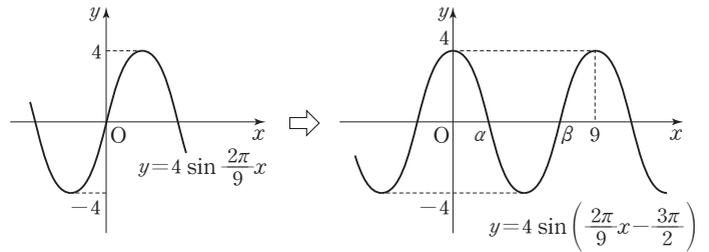
$(3-\alpha):\alpha=\frac{\pi}{6}:\frac{\pi}{2}=1:3$, $3-\alpha=\frac{\alpha}{3}$

즉, $\alpha+\frac{\alpha}{3}=3$에서 $\alpha=3\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 주기는 $4\alpha=4\times\frac{9}{4}=9$이다.

즉, $\frac{2\pi}{a}=9$에서 $a=\frac{2\pi}{9}$

함수 $y=4\sin(ax-b)=4\sin\left\{a\left(x-\frac{b}{a}\right)\right\}$의 그래프는 함수 $y=4\sin ax$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{b}{a}$만큼 평행이동한 것이다.

$\alpha<\beta<9$일 때 $f(\beta)=0$이면 $\beta=9\times\frac{3}{4}=\frac{27}{4}$이므로 $\frac{b}{a}$의 최솟값은 $\frac{27}{4}$이고 그때의 b의 값은 $b=\frac{27}{4}\times a=\frac{27}{4}\times\frac{2\pi}{9}=\frac{3\pi}{2}$

따라서 $\frac{a+b}{\pi}$의 최솟값은 $\frac{\frac{2\pi}{9}+\frac{3\pi}{2}}{\pi}=\frac{31}{18}$

답 ④

주의

함수 $f(x)=4\sin(ax-b)=4\sin\left(\frac{2\pi}{9}x-b\right)$의 그래프가 점 C$'(3, -2)$를 지난다는 것을 이용하여 b의 최솟값을 구할 때는 주의해야 한다.

$f(3)=4\sin\left(\frac{2\pi}{9}\times3-b\right)=-2$, $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-b\right)=-\frac{1}{2}$

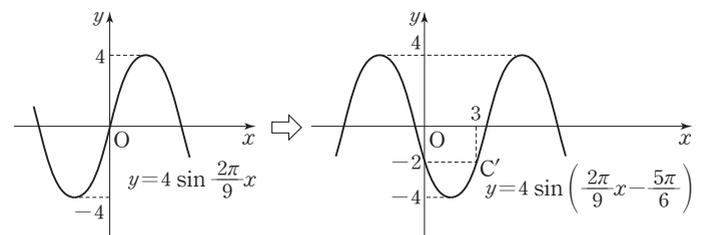
$b>0$이므로 $\frac{2\pi}{3}-b<\frac{2\pi}{3}$

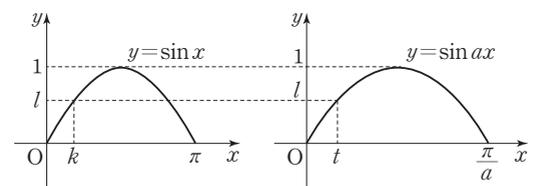
$\frac{2\pi}{3}-b=-\frac{\pi}{6}$에서 $b=\frac{5\pi}{6}$

$\frac{2\pi}{3}-b=-\frac{5\pi}{6}$에서 $b=\frac{3\pi}{2}$

⋮

$b=\frac{5\pi}{6}$일 때 $f(x)=4\sin\left(\frac{2\pi}{9}x-\frac{5\pi}{6}\right)=4\sin\left\{\frac{2\pi}{9}\left(x-\frac{15}{4}\right)\right\}$

이므로 그림과 같이 함수 $y=4\sin\frac{2\pi}{9}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{15}{4}$만큼 평행이동한 것으로 주어진 그래프와 일치하지 않는다.

참고

다음 그림에서 삼각함수의 그래프의 주기가 바뀌어도 비례식 $k:\pi=t:\frac{\pi}{a}$가 성립한다.

$\sin at=l$에서 $at=k$, $t=\frac{k}{a}$

따라서 $t:\frac{\pi}{a}=\frac{k}{a}:\frac{\pi}{a}=k:\pi$이다.

10

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+b=3$

$b=3$

함수 $f(x)=a\cos\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)+3$의 최솟값이 -1이고 $a>0$이므로

$-a+3=-1$, $a=4$

따라서 함수 $f(x)=4\cos\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)+3$의 최댓값은

$4+3=7$

답 7

11

$-1\le\sin\frac{x}{2}\le1$이므로

$-3+k\le3\sin\frac{x}{2}+k\le3+k$

$(3+k)-(-3+k)=6$인데 $M-m=5$이므로

$-3+k<0$, $3+k>0$

따라서 함수 $f(x)=\left|3\sin\frac{x}{2}+k\right|-2$의 최댓값은

$-(-3+k)-2=-k+1$ 또는 $(3+k)-2=k+1$이고 최솟값은

-2이다.

$-k+1-(-2)=5$에서 $k=-2$

$k+1-(-2)=5$에서 $k=2$

구하는 모든 실수 k의 제곱의 합은

$(-2)^2+2^2=8$

답 8

12

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-5\cos^2x+4\sin x\\&=-\sin^2x-5(1-\sin^2x)+4\sin x\\&=4\sin^2x+4\sin x-5\end{aligned}$$

이때 $\sin x=t$라 하면 $0\le x<2\pi$이므로 $-1\le t\le1$이다.

따라서 함수 $y=4t^2+4t-5=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-6$의 최댓값은 $t=1$일 때 3이고, 최솟값은 $t=-\frac{1}{2}$일 때 -6이다.

따라서 $M=3$, $m=-6$이므로

$M-m=3-(-6)=9$

답 ④

13

$1-2\sin^2x=\cos x$에서

$1-2(1-\cos^2x)=\cos x$

$2\cos^2x-1=\cos x$, $2\cos^2x-\cos x-1=0$

$(\cos x-1)(2\cos x+1)=0$이므로

$\cos x=1$ 또는 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$이므로

(i) $\cos x=1$에서

$x=0$

(ii) $\cos x=-\frac{1}{2}$에서

$x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

따라서 $n=3$, $\alpha=\frac{4}{3}\pi$이므로

$n\alpha=3\times\frac{4}{3}\pi=4\pi$

답 ③

14

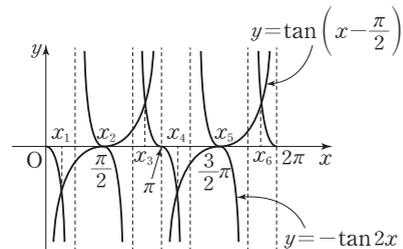
방정식 $\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\tan2x=0$의 실근은 두 함수

$y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $y=-\tan2x$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

$y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\tan x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

또한 $y=-\tan2x$의 그래프는 $y=\tan2x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이고 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

따라서 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $y=-\tan2x$의 그래프는 그림과 같고 $0\le x<2\pi$에서 6개의 점에서 만난다.

만나는 6개의 점의 x좌표를 작은 값부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6이라 하자.

두 함수 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $y=-\tan2x$의 그래프는 모두 점 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi,0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{\pi}{2}$에서

$x_1+x_3=\pi$, $x_2=\frac{\pi}{2}$

$\frac{x_4+x_6}{2}=\frac{3}{2}\pi$에서

$x_4+x_6=3\pi$, $x_5=\frac{3}{2}\pi$

따라서 모든 실근의 합은

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6&=(x_1+x_3)+x_2+(x_4+x_6)+x_5\\&=\pi+\frac{\pi}{2}+3\pi+\frac{3}{2}\pi\\&=6\pi\end{aligned}$$

답 ⑤

15

$\frac{x-\pi}{3}=\theta$라 하면 $x=3\theta+\pi$이므로

$\frac{2x+\pi}{6}=\frac{2(3\theta+\pi)+\pi}{6}=\theta+\frac{\pi}{2}$

x에 대한 부등식 $2\sin^2\left(\frac{x-\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{2x+\pi}{6}\right)<0$을 θ에 대한 부등식으로 바꾸면

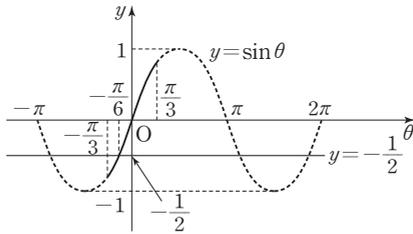
$2\sin^2\theta-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)<0$

$2\sin^2\theta+\sin\theta<0$

$\sin\theta(2\sin\theta+1)<0$

$-\frac{1}{2}<\sin\theta<0$ ...... ㉠

$0\le x<2\pi$이므로 $-\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{3}$이다.

$y=\sin\theta$의 그래프는 다음과 같으므로 $-\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{3}$에서 부등식 ㉠을 만족시키는 θ의 값의 범위는 $-\frac{\pi}{6}<\theta<0$

즉, $-\frac{\pi}{6}<\frac{x-\pi}{3}<0$이므로

$-\frac{\pi}{2}<x-\pi<0$, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\pi$이므로

$4\alpha+\beta=2\pi+\pi=3\pi$

답 ③

16

삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$A+C=\pi-B$

따라서

$4\sin(A+C)\sin B=4\sin(\pi-B)\sin B=4\sin^2 B=3$

$\sin^2 B=\frac{3}{4}$

$0<B<\pi$이므로 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2\times\sqrt{10}$

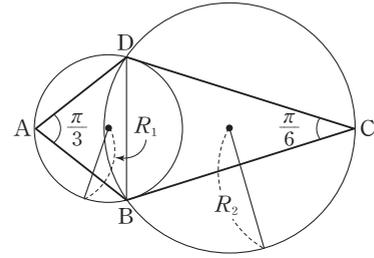
따라서

$\overline{AC}=2\times\sqrt{10}\times\sin B$

$=2\times\sqrt{10}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{30}$

답 ③

17

그림과 같이 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R_1$ ...... ㉠

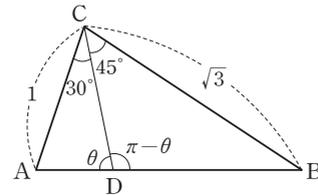
삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2R_2$ ...... ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{2R_2}{2R_1}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

답 ②

18

그림과 같이 $\angle ADC=\theta$로 놓으면

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\overline{AD}}{\sin 30^\circ}$

$\overline{AD}=\frac{1}{\sin\theta}\times\sin 30^\circ=\frac{1}{2\sin\theta}$

삼각형 BCD에서 $\angle BDC=\pi-\theta$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{\overline{BD}}{\sin 45^\circ}$

$\overline{BD}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi-\theta)}\times\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2\sin\theta}$

따라서

$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2\sin\theta}}{\frac{1}{2\sin\theta}}=\sqrt{6}$

답 ③

다른 풀이

삼각형 ADC와 삼각형 BCD의 넓이의 비는 선분 AD와 선분 BD의 길이의 비와 같다.

$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{(\text{삼각형 BCD의 넓이})}{(\text{삼각형 ADC의 넓이})}$

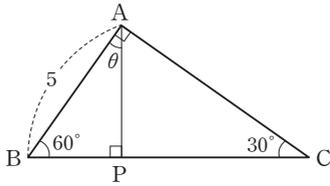
$$=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\sqrt{3}\times\sin 45^\circ}{\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times 1\times\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$$

19

삼각형 ABP에서 사인법칙을 이용하면

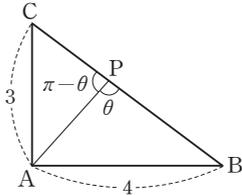
$\frac{\overline{BP}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AP}}{\sin 60^\circ}$가 성립하므로

$\frac{\overline{BP}}{\sin\theta}$의 최솟값은 $\overline{AP}$의 길이가 최소일 때이다.

$\overline{AP}$의 길이는 점 P가 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발일 때 최소이므로 $\frac{\overline{BP}}{\sin\theta}$의 최솟값은

$$\frac{\overline{AP}}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{AB}\sin 60^\circ}{\sin 60^\circ}=\overline{AB}=5$$

답 5

20

$\angle APB=\theta$로 놓으면 $\angle APC=\pi-\theta$

삼각형 ABP와 삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{4}{\sin\theta}=2R_1$, $\frac{3}{\sin(\pi-\theta)}=2R_2$

이때 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$이므로

$R_1 : R_2=4 : 3$

따라서 삼각형 ABP와 삼각형 APC의 외접원의 넓이의 비는

$S_1 : S_2=\pi {R_1}^2 : \pi {R_2}^2$

$=4^2 : 3^2=16 : 9$

답 ④

21

원에 내접하는 삼각형의 개수를 n이라 하면

$30^\circ\times n<180^\circ$에서

$n<6$

따라서 원에 내접하는 삼각형의 최대 개수는 5이다.

또 삼각형 AP_1P_{n+1} $(n=1, 2, 3, 4, 5)$의 외접원의 반지름의 길이가 R이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin 30^\circ}=2R$이므로 $\overline{P_1P_2}=2R\times\frac{1}{2}=R$

$\frac{\overline{P_1P_3}}{\sin 60^\circ}=2R$이므로 $\overline{P_1P_3}=2R\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}R$

$\frac{\overline{P_1P_4}}{\sin 90^\circ}=2R$이므로 $\overline{P_1P_4}=2R\times 1=2R$

$\frac{\overline{P_1P_5}}{\sin 120^\circ}=2R$이므로 $\overline{P_1P_5}=2R\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}R$

$\frac{\overline{P_1P_6}}{\sin 150^\circ}=2R$이므로 $\overline{P_1P_6}=2R\times\frac{1}{2}=R$

따라서

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{P_1P_{k+1}}=\sum_{k=1}^{5}\overline{P_1P_{k+1}}$$
$$=\overline{P_1P_2}+\overline{P_1P_3}+\overline{P_1P_4}+\overline{P_1P_5}+\overline{P_1P_6}$$
$$=4R+2\sqrt{3}R$$
$$=2(2+\sqrt{3})R=6(2+\sqrt{3})$$

이므로 $R=3$

답 ⑤

22

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{9^2+7^2-5^2}{2\times9\times7}=\frac{105}{126}=\frac{5}{6}$$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{CD}\times\cos C$$
$$=7^2+3^2-2\times7\times3\times\frac{5}{6}=23$$

$\overline{AD}>0$이므로 $\overline{AD}=\sqrt{23}$

답 ③

23

피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$$
$$=\sqrt{9+7}=\sqrt{16}=4$$

따라서 직사각형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$\overline{AO}=\overline{CO}=2$이고 $\overline{OB}=2$이다.

삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\alpha=\frac{2^2+2^2-3^2}{2\times2\times2}=-\frac{1}{8}$$

또 $\alpha+\beta=\pi$이므로

$$\sin\beta=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{8}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{63}{64}}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

따라서

$$\cos\alpha+\sin\beta=\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{3\sqrt{7}-1}{8}$$

답 ③

24

$\overline{PC}=x$라 하면

삼각형 APC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=10^2+x^2-2\times10\times x\times\cos 120^\circ$

$=100+x^2+10x$

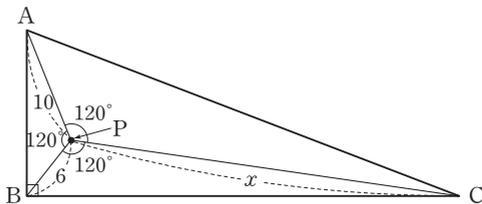
삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=10^2+6^2-2\times10\times6\times\cos 120^\circ$

$=100+36+60=196$

삼각형 BCP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=6^2+x^2-2\times6\times x\times\cos 120^\circ$

$=36+x^2+6x$

삼각형 ABC는 $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형이므로

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$

$100+x^2+10x=196+36+x^2+6x$

$4x=132$

따라서 $x=33$

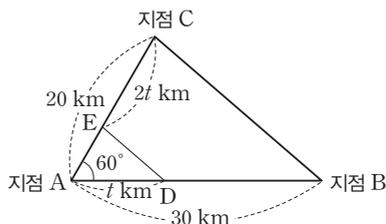
답 33

25

그림과 같이 두 여객선 P와 Q의 위치를 잇는 선분이 두 지점 B와 C를 잇는 선분과 평행이 되는 순간의 두 여객선의 위치를 각각 D, E라고 하자. 이때 여객선 P가 움직인 거리를 t km라 하면 여객선 Q는 여객선 P의 2배의 속력으로 움직이므로 여객선 Q가 움직인 거리는 $2t$ km이다.

즉, $\overline{AD}=t$ km, $\overline{CE}=2t$ km이므로

$\overline{AE}=20-2t$(km)

$\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DE}$이므로 삼각형 ADE와 삼각형 ABC는 서로 닮은 도형이다.

따라서 $\overline{AD}:\overline{AE}=\overline{AB}:\overline{AC}$이므로

$t:(20-2t)=30:20$

$20t=30(20-2t)$

$80t=600,\ t=\frac{15}{2}$

따라서 $\overline{AD}=\frac{15}{2}$ km, $\overline{AE}=20-2\times\frac{15}{2}=5$(km)

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\cos 60^\circ$

$=\left(\frac{15}{2}\right)^2+5^2-2\times\frac{15}{2}\times5\times\frac{1}{2}$

$=\frac{225}{4}+25-\frac{75}{2}$

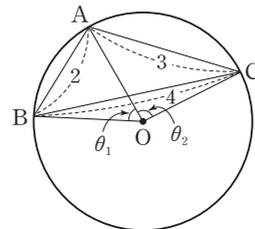
$=\frac{175}{4}$

$\overline{DE}>0$이므로 $\overline{DE}=\frac{5\sqrt{7}}{2}$(km)

따라서 $p=2,\ q=5$이므로

$p+q=7$

답 7

26

$\theta_3=\theta_1+\theta_2$이므로 그림과 같이 현을 옮겨 세 변의 길이가 각각 2, 3, 4인 삼각형 ABC를 만들 수 있다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3}=-\frac{3}{12}=-\frac{1}{4}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\frac{4}{\sin A}=2R$

$R=\frac{4}{2\times\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{8}{\sqrt{15}}$

삼각형 ABO에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta_1=\frac{R^2+R^2-2^2}{2\times R\times R}=\frac{2\times\frac{64}{15}-4}{2\times\frac{64}{15}}$

$=\frac{128-60}{128}=\frac{68}{128}=\frac{17}{32}$

답 ②

27

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c$라 하면

$\frac{\sin A}{7}=\frac{\sin B}{3}=\frac{\sin C}{5}$에서

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=7:3:5$

따라서 $a=7k,\ b=3k,\ c=5k\ (k>0)$으로 놓으면

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\times3k\times5k}$

$=\frac{-15k^2}{30k^2}=-\frac{1}{2}$

따라서

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$

$=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

한편, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A}=2R$이므로

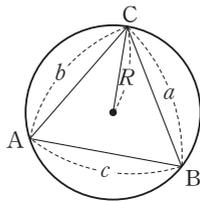
$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{3}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$

따라서 원의 넓이는

$\pi R^2=\pi(\sqrt{3})^2=3\pi$

답 ②

참고

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$에서

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$\sin A : \sin B : \sin C=a : b : c$

28

$A+B+C=\pi$에서 $B+C=\pi-A$이므로

$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$

$\sin(B+C)\cos A=\cos\left(\frac{3}{2}\pi+B\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+B\right)$에서

$\sin A\cos A=\sin B\cos B$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$\frac{a}{2R}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

양변에 $4Rabc$를 곱하면

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

$a^4-b^4-c^2(a^2-b^2)=0$

$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$

따라서 $a=b$ 또는 $a^2+b^2=c^2$

그런데 $a\neq b$이므로 구하는 삼각형 ABC는 $C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

답 ③

29

$\angle ADB=150^\circ$이므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=3^2+(\sqrt{3})^2-2\times3\times\sqrt{3}\times\cos150^\circ$

$=9+3-2\times3\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=21$

$\overline{AB}>0$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{21}$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\times1\times\sqrt{3}\times\cos30^\circ$

$=1+3-2\times1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$

$\overline{AC}>0$이므로 $\overline{AC}=1$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AD}}{\sin C}=\frac{\overline{AC}}{\sin30^\circ}$

$\sin C=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}\times\sin30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$에서

$R=\frac{\overline{AB}}{2\sin C}=\frac{\sqrt{21}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{7}$

답 ④

다른 풀이

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\times1\times\sqrt{3}\times\cos30^\circ$

$=1+3-2\times1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$

$\overline{AC}>0$이므로 $\overline{AC}=1$

$\overline{AC}=\overline{CD}=1$이므로 삼각형 ADC는 이등변삼각형이다.

따라서 $C=120^\circ$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos C$

$=1^2+4^2-2\times1\times4\times\cos120^\circ$

$=1+16+4=21$

$\overline{AB}>0$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{21}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$에서

$R=\frac{\overline{AB}}{2\sin C}=\frac{\sqrt{21}}{2\sin120^\circ}=\frac{\sqrt{21}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{7}$

30

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\cos(\angle BAD)$

$=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos120^\circ$

$=4+9-2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=19$ …… ㉠

$\overline{BC}=\overline{CD}=x$로 놓으면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos120^\circ$

$=x^2+x^2-2\times x\times x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=3x^2$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$3x^2=19$, $x^2=\frac{19}{3}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이와 삼각형 BCD의 넓이의 합이므로

$\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}\times x\times x\times\sin120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times x^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{19\sqrt{3}}{12}$

$=\frac{37\sqrt{3}}{12}$

$p=12$, $q=37$이므로

$p+q=12+37=49$

답 49

31

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$\quad=(a+b)^2-2ab-2ab\cos C$

$\quad=(a+b)^2-2ab(1+\cos C)$

주어진 조건에서

$c=2\sqrt{26}$, $a+b=8+2\sqrt{2}$, $C=135^\circ$

이므로

$(2\sqrt{26})^2=(8+2\sqrt{2})^2-2ab(1+\cos135^\circ)$

$104=72+32\sqrt{2}-2ab\left\{1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

$104=72+32\sqrt{2}-2ab+\sqrt{2}ab$

$(2-\sqrt{2})ab=-32+32\sqrt{2}$

$ab=\frac{32(\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}}$

$\quad=\frac{32(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}$

$\quad=\frac{32}{\sqrt{2}}=16\sqrt{2}$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times16\sqrt{2}\times\sin135^\circ$

$\qquad=\frac{1}{2}\times16\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8$

답 ②

32

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ …… ㉠

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos120^\circ$

$\quad=4+9-2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=19$

$\overline{AC}>0$이므로 $\overline{AC}=\sqrt{19}$

$\overline{AB}\,/\!/\,\overline{EC}$이고 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{AD}$에서 사각형 ABCP는 평행사변형이다.

따라서 삼각형 ABC와 삼각형 CPA는 서로 합동이므로

삼각형 CPA의 높이를 h라 하면 삼각형 CPA의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times h=\frac{1}{2}\times\sqrt{19}\times h$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{19}\times h=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$h=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=\frac{3\sqrt{57}}{19}$

한편, 삼각형 ACP와 삼각형 DEP는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AC}:\overline{DE}=\sqrt{19}:\sqrt{57}=1:\sqrt{3}$

따라서 삼각형 DEP의 높이를 h'이라 하면

$h'=\sqrt{3}h=\frac{9\sqrt{19}}{19}$

그러므로 삼각형 PDE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times h'=\frac{1}{2}\times\sqrt{57}\times\frac{9\sqrt{19}}{19}$

$\qquad=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{19}\times\frac{9\sqrt{19}}{19}$

$\qquad=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

답 ③

다른 풀이

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos120^\circ$

$\quad=4+9-2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\quad=19$

$\overline{AC}>0$이므로 $\overline{AC}=\sqrt{19}$

$\overline{AB}\,/\!/\,\overline{EC}$이고 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{AD}$에서 사각형 ABCP는 평행사변형이다.

평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 서로 같으므로

$\overline{CP}=2$, $\overline{AP}=3$

한편, 삼각형 ACP와 삼각형 DEP는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AC}:\overline{DE}=\sqrt{19}:\sqrt{57}=1:\sqrt{3}$

따라서 $\overline{PE}=\sqrt{3}\times\overline{PC}=2\sqrt{3}$, $\overline{PD}=\sqrt{3}\times\overline{PA}=3\sqrt{3}$

$\angle ABC=\angle APC=\angle DPE=120^\circ$이므로

삼각형 PDE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PD}\times\overline{PE}\times\sin120^\circ=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\qquad=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

참고

삼각형 ACP와 삼각형 DEP는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AC}:\overline{DE}=\sqrt{19}:\sqrt{57}=1:\sqrt{3}$에서 넓이의 비는 $1:3$

삼각형 ABC와 삼각형 CPA는 서로 합동이고 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로 삼각형 PDE의 넓이는 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$이다.

03 수열

정답 본문 32~43쪽

01 ④	02 ②	03 ④	04 ②	05 ③
06 ②	07 ③	08 ③	09 ⑤	10 ②
11 ③	12 ①	13 ②	14 ②	15 ⑤
16 ②	17 ②	18 ④	19 340	20 ③
21 ②	22 ④	23 ②	24 ③	25 ①
26 ②	27 ①	28 ②	29 ④	30 ③
31 ③	32 ②	33 77	34 50	

01

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1a_9=a(a+8d)$

$\quad=a^2+8ad=-60$ …… ㉠

$a_4a_6=(a+3d)(a+5d)$

$\quad=a^2+8ad+15d^2=0$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$15d^2=60,\ d^2=4$ …… ㉢

따라서

$a_3a_7=(a+2d)(a+6d)$

$\quad=a^2+8ad+12d^2$

$\quad=-60+12\times4$ (㉠, ㉢에서)

$\quad=-60+48=-12$

답 ④

02

$n=2$일 때,

$\{1, 2\}$에서 $A_2=\{3\}$이므로 $a_2=1$

$n=3$일 때,

$\{1, 2, 3\}$에서 $A_3=\{3, 4, 5\}$이므로 $a_3=3$

$n=4$일 때,

$\{1, 2, 3, 4\}$에서 $A_4=\{3, 4, 5, 6, 7\}$이므로 $a_4=5$

⋮

$n=k$일 때,

$\{1, 2, 3, \cdots, k-1, k\}$에서 $A_k=\{3, 4, 5, \cdots, 2k-1\}$이므로

$a_k=2k-3$

즉, $a_n=2n-3\ (n=2, 3, 4, \cdots)$이므로

$2n-3=99,\ 2n=102$

$n=51$

따라서 $a_n=99$를 만족시키는 자연수 n의 값은 51이다.

답 ②

03

등차수열 $\{a_n\}$에서 공차가 $2d$이고

$|a_4|>|a_5|$이므로

$(a_4)^2>(a_5)^2$

즉, $(a_1+6d)^2>(a_1+8d)^2$

$(a_1)^2+12a_1d+36d^2>(a_1)^2+16a_1d+64d^2$

$4a_1d+28d^2=4d(a_1+7d)<0$

$d>0$이므로 $a_1<-7d$ …… ㉠

$a_4a_5=(a_1+6d)(a_1+8d)$

$\quad=(a_1)^2+14a_1d+48d^2$

$\quad=(a_1+7d)^2-d^2$

㉠에서 $a_1<-7d$이고 a_1은 정수이므로

$a_1=-7d-1$일 때, a_4a_5는 최솟값을 가진다.

따라서 $f(d)=-7d-1$이므로

$f(2)+f(3)=(-15)+(-22)=-37$

답 ④

다른 풀이

모든 항이 정수이고 공차가 $2d>0$ (d는 자연수)이므로 $a_4<a_5$

$|a_4|>|a_5|$에서 $a_4<0<a_5,\ a_4+a_5<0$ …… ㉠

(i) $d=2$일 때, 공차가 4이므로 ㉠에서

$a_4=-3,\ a_5=1$

이때 $a_1=f(2)=a_4-3\times(\text{공차})=-3-3\times4=-15$

(ii) $d=3$일 때, 공차가 6이므로 ㉠에서

$a_4=-4,\ a_5=2$ 또는 $a_4=-5,\ a_5=1$

그런데 a_4a_5의 값이 최소이려면 $a_4=-4,\ a_5=2$이다.

이때 $a_1=f(3)=a_4-3\times(\text{공차})=-4-3\times6=-22$

(i), (ii)에서

$f(2)+f(3)=-15-22=-37$

04

$\log_3\frac{1}{2},\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10},\ \log_3 18$이 등차수열을 이루므로 12개의 수의 합을 S_{12}라 하면

$$S_{12}=\frac{12\left(\log_3\frac{1}{2}+\log_3 18\right)}{2}$$

$$=\frac{12\log_3\left(\frac{1}{2}\times18\right)}{2}$$

$$=6\times\log_3 9=6\times2\log_3 3=12$$

따라서

$$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=S_{12}-\left(\log_3\frac{1}{2}+\log_3 18\right)$$

$$=12-\log_3 9$$

$$=12-2=10$$

답 ②

05

3^n 이하의 모든 자연수의 합은 첫째항과 공차가 1이고 끝항이 3^n인 등차수열의 합이므로

$1+2+3+\cdots+3^n=\frac{3^n(3^n+1)}{2}$

$=\frac{3^{2n}+3^n}{2}$ …… ㉠

3^n 이하의 자연수 중에서 3의 배수인 모든 자연수의 합은 첫째항과 공차가 3이고 끝항이 3^n인 등차수열의 합이므로

$3+6+9+\cdots+3^n=3(1+2+3+\cdots+3^{n-1})$

$=3\times\frac{3^{n-1}(3^{n-1}+1)}{2}$

$=\frac{3^{2n-1}+3^n}{2}$ …… ㉡

따라서 3^n 이하의 자연수 중에서 3과 서로소인 모든 자연수의 합은 ㉠−㉡이므로 a_n은

$a_n=\frac{3^{2n}+3^n}{2}-\frac{3^{2n-1}+3^n}{2}$

$=\frac{3^{2n}-3^{2n-1}}{2}$

$=\frac{3^{2n-1}(3-1)}{2}$

$=3^{2n-1}$

따라서 $\log_3 a_n=\log_3 3^{2n-1}=2n-1$이므로

$\log_3 a_{50}=2\times50-1=99$

답 ③

06

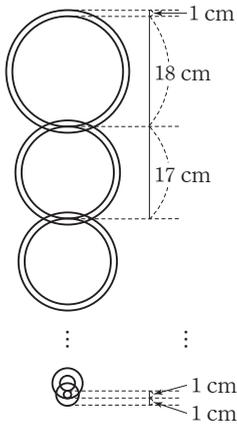
그림과 같이 가장 위의 폭 1 cm와 가장 아래의 폭 1 cm를 남겨두고 고리의 안쪽 지름의 길이를 구하면 18 cm, 17 cm, ⋯, 1 cm이므로 가장 위에 있는 고리의 위 끝에서 가장 아래에 있는 고리의 아래 끝까지의 길이는

$1+(1+2+\cdots+18)+1$

$=2+\frac{18\times19}{2}$

$=2+171=173(\text{cm})$

따라서 $a=173$

1 cm
18 cm
17 cm
1 cm
1 cm

답 ②

07

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_3=-\frac{5}{2}$에서 $a+ar^2=-\frac{5}{2}$ …… ㉠

$r^2>0$이므로 $a<0$

$a_2a_4=4$에서 $ar\times ar^3=a^2r^4=(ar^2)^2=4$

$a<0$, $r^2>0$이므로

$ar^2=-2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a=-\frac{1}{2}$이고 $r^2=4$

따라서 $a_7=ar^6=-\frac{1}{2}\times(r^2)^3=-\frac{1}{2}\times4^3=-32$

답 ③

08

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

조건 (가)에서

$b_3+b_5+b_7=\log_2 ar^2+\log_2 ar^4+\log_2 ar^6$

$=\log_2 a^3r^{12}$

$=\log_2(ar^4)^3$

$=3\log_2 ar^4=15$

이므로 $\log_2 ar^4=5$

$ar^4=2^5$ …… ㉠

조건 (나)에서

$b_4+b_6+b_8=\log_2 ar^3+\log_2 ar^5+\log_2 ar^7$

$=\log_2 a^3r^{15}$

$=\log_2(ar^5)^3$

$=3\log_2 ar^5=21$

이므로 $\log_2 ar^5=7$

$ar^5=2^7$ …… ㉡

㉡÷㉠에서 $r=2^2=4$이므로 $a=\frac{1}{8}$

$a_n=\frac{1}{8}\times4^{n-1}=2^{-3}\times2^{2n-2}=2^{2n-5}$

따라서 $b_{15}=\log_2 a_{15}=\log_2 2^{25}=25$

답 ③

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=ar^{n-1}$이라 하면

$b_n=\log_2 ar^{n-1}=\log_2 a+(n-1)\log_2 r$

이므로 수열 $\{b_n\}$은 등차수열이다.

수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하고 조건 (나)의 식에서 조건 (가)의 식을 변끼리 빼면 $3d=6$에서 $d=2$이고, 조건 (가)에서

$b_3+b_5+b_7=(b_1+4)+(b_1+8)+(b_1+12)=15$

$3b_1+24=15$

$3b_1=-9$, $b_1=-3$

따라서 $b_{15}=-3+14\times2=25$

09

첫째항이 $\frac{1}{64}$이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=\frac{1}{64}\times2^{n-1}$

$=2^{-6}\times2^{n-1}=2^{n-7}$

이다.

$a_1\times a_2\times\cdots\times a_n>128$에서

$2^{-6}\times2^{-5}\times\cdots\times2^{n-7}>128$

$2^{-6}\times2^{-5}\times\cdots\times2^{n-7}=2^{-6+(-5)+\cdots+(n-7)}$이고

$-6+(-5)+\cdots+(n-7)=\frac{n\{-6+(n-7)\}}{2}$

$=\frac{n(n-13)}{2}$

이므로

$2^{\frac{n(n-13)}{2}}>2^7$

$\frac{n(n-13)}{2}>7$, $n^2-13n>14$

$n^2-13n-14>0$, $(n-14)(n+1)>0$

$n+1>0$이므로 $n>14$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 15이다.

답 ⑤

10

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\frac{3a_3}{a_2}=\frac{3ar^2}{ar}=3r$, $\frac{a_6}{a_4}=\frac{ar^5}{ar^3}=r^2$

이므로 $\frac{3a_3}{a_2}+\frac{a_6}{a_4}=10$에서

$3r+r^2=10$, $r^2+3r-10=0$

$(r+5)(r-2)=0$

모든 항이 양수이므로 $r=2$이다.

따라서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=\frac{3\times(2^7-1)}{2-1}=381$

답 ②

11

함수 $f(x)$가 다항함수이므로 함수 $g(x)=(f\circ f)(x)$도 다항함수이다.

$g(0)=(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(\sqrt{2})$

따라서

$$\begin{aligned}f(\sqrt{2})&=(\sqrt{2})^{10}+(\sqrt{2})^9+\cdots+\sqrt{2}+\sqrt{2}\\&=\frac{\sqrt{2}\{(\sqrt{2})^{10}-1\}}{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}\\&=\frac{31\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}\\&=31\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}\\&=62+32\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ③

12

조건 (가)에서 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}=85$

조건 (나)에서 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}=170$이므로

$$\begin{aligned}a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}&=a_1r+a_3r+a_5r+\cdots+a_{2k-1}r\\&=r\times(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1})=170\end{aligned}$$

에서 $85r=170$

$r=2$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=1$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2k}=\frac{2^{2k}-1}{2-1}=85+170$

$2^{2k}-1=255$, $2^{2k}=256=2^8$

이므로 $k=4$

따라서 $r+k=2+4=6$

답 ①

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 r이므로 등비수열 $\{a_{2n-1}\}$의 공비는 r^2이다.

조건 (가)에서 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}=85$

이므로 $\frac{(r^2)^k-1}{r^2-1}=85$ …… ㉠

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 r이므로 등비수열 $\{a_{2n}\}$의 공비는 r^2이고

$a_1=1$에서 $a_2=r$이다.

조건 (나)에서 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}=170$

이므로 $\frac{r\{(r^2)^k-1\}}{r^2-1}=170$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$85r=170$

$r=2$

㉠에 $r=2$를 대입하면

$\frac{2^{2k}-1}{2^2-1}=85$

$2^{2k}-1=255$, $2^{2k}=256=2^8$

이므로 $k=4$

따라서 $r+k=2+4=6$

13

세 수 16, 16^a, 32^b이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(16^a)^2=16\times32^b$에서

$2^{8a}=2^4\times2^{5b}=2^{4+5b}$

$8a=4+5b$ …… ㉠

세 수 $\log 5$, $\log 2a$, $\log b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log 2a=\log 5+\log b$에서

$\log(2a)^2=\log 5b$

$4a^2=5b$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$4a^2-8a+4=0$, $4(a^2-2a+1)=0$

$4(a-1)^2=0$

따라서 $a=1$, $b=\frac{4}{5}$이므로

$a+b=\frac{9}{5}$

답 ②

14

세 수 a, b, $a-b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+(a-b)=2a-b$

$3b=2a$, $b=\frac{2}{3}a$ …… ㉠

세 수 a^2, 12, $(a-b)^2$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2(a-b)^2=12^2$

$\{a(a-b)\}^2=12^2$

$a(a-b)>0$이므로

$a(a-b)=12$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

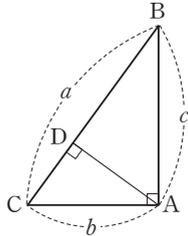
$a\left(a-\frac{2}{3}a\right)=12$

$\frac{a^2}{3}=12$, $a^2=36$

a는 자연수이므로 $a=6$, $b=4$

따라서 $a+b=10$

답 ②

15

그림과 같이 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$라 하면

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$a^2=b^2+c^2$ …… ㉠

세 직각삼각형 ABC, ABD, ADC는 닮은 도형이므로 각 변의 길이의 비에 의하여

$\overline{BD} : c=c : a$에서 $\overline{BD}=\frac{c^2}{a}$

$\overline{CD} : b=b : a$에서 $\overline{CD}=\frac{b^2}{a}$

$\overline{AD} : b=c : a$에서 $\overline{AD}=\frac{bc}{a}$

그런데 세 직각삼각형 ABC, ABD, ADC의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

2×(삼각형 ABD의 넓이)

=(삼각형 ABC의 넓이)+(삼각형 ADC의 넓이)

즉, $2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{c^2}{a}\times\frac{bc}{a}\right)=\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}\times\frac{b^2}{a}\times\frac{bc}{a}$

$\frac{2bc^3}{a^2}=bc+\frac{b^3c}{a^2}$

$a^2>0$이므로 $2bc^3=a^2bc+b^3c$

$b>0$, $c>0$이므로 $2c^2=a^2+b^2$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서 $2c^2=a^2+(a^2-c^2)$

$3c^2=2a^2$, $c^2=\frac{2}{3}a^2$

$c>0$이므로 $c=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

따라서 $\sin C=\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

답 ⑤

다른 풀이

세 직각삼각형 ABC, ABD, ADC의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하면 S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S_2=S_1+S_3$ …… ㉠

그런데

(삼각형 ABC의 넓이)

=(삼각형 ABD의 넓이)+(삼각형 ADC의 넓이)

이므로 $S_1=S_2+S_3$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서 $S_2=2S_3$이므로

$S_2 : S_3=2 : 1$

삼각형 ABD와 삼각형 ADC의 넓이의 비는 $\overline{BD}$와 $\overline{CD}$의 길이의 비와 같으므로

$\overline{BD} : \overline{CD}=2 : 1$

$\overline{BD}=2k$, $\overline{CD}=k$ $(k>0)$이라 하면

$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=2k+k=3k$

$\overline{AB}^2=\overline{BD}\times\overline{BC}=2k\times3k=6k^2$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{6}k$ $(\overline{AB}>0)$

따라서 직각삼각형 ABC에서

$\sin C=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{6}k}{3k}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

16

$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$이라 하면

$\log_2 S_n=n+2$에서

$S_n=2^{n+2}$이므로

$a_6=S_6-S_5$

$=2^8-2^7$

$=2^7\times(2-1)=128$

답 ②

17

$a_1+a_4=S_1+(S_4-S_3)$

$=2+k+\{(32+k)-(18+k)\}$

$=2+k+14$

$=16+k$

$a_1+a_4=14$에서

$16+k=14$

따라서 $k=-2$

답 ②

다른 풀이

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$n=1$일 때, $a_1=S_1=2+k$

$n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2+k-\{2(n-1)^2+k\}$

$=4n-2$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=\begin{cases}2+k & (n=1)\\ 4n-2 & (n\geq2)\end{cases}$

$a_1+a_4=14$에서

$(2+k)+14=14$

따라서 $k=-2$

18

$b_n = na_n$에서

$n=1$일 때, $b_1 = 1 \times a_1 = S_1 = \frac{1\times2\times3}{3} = 2$ …… ㉠

$S_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$에서

$S_{n-1} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1}$

$= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

이므로 $n \ge 2$일 때,

$na_n = S_n - S_{n-1}$

$= \frac{n(n+1)}{3}\{(n+2)-(n-1)\}$

$= n(n+1)$

$a_n = n+1$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서 $a_n = n+1\ (n \ge 1)$

따라서 $a_1 + a_{2021} = 2 + 2022 = 2024$

답 ④

19

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이 40이므로

$\sum_{k=1}^{20} a_k = 40$이고,

수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합이 60이므로

$\sum_{k=1}^{20} b_k = 60$이다.

수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{20} c_k = \sum_{k=1}^{20} (3a_k + b_k + 8)$이다.

따라서

$\sum_{k=1}^{20} (3a_k + b_k + 8) = \sum_{k=1}^{20} 3a_k + \sum_{k=1}^{20} b_k + \sum_{k=1}^{20} 8$

$= 3\sum_{k=1}^{20} a_k + 60 + 8 \times 20$

$= 3 \times 40 + 60 + 160 = 340$

답 340

20

$\sum_{k=1}^{15} k(a_k - a_{k+1})$

$= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \cdots + 15(a_{15} - a_{16})$

$= a_1 + (-a_2 + 2a_2) + (-2a_3 + 3a_3)$

$+ \cdots + (-14a_{15} + 15a_{15}) - 15a_{16}$

$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{15}) - 15a_{16}$

$= \sum_{k=1}^{15} a_k - 15 \times \frac{1}{3}$

이므로 $\sum_{k=1}^{15} a_k - 5 = 100$

따라서 $\sum_{k=1}^{15} a_k = 105$

답 ③

21

두 자연수 m과 n $(m<n)$ 사이에 있는 유리수 중에서 분모가 8인 기약분수를 나열하면

$m+\frac{1}{8},\ m+\frac{3}{8},\ m+\frac{5}{8},\ m+\frac{7}{8},$

$(m+1)+\frac{1}{8}, (m+1)+\frac{3}{8},\ (m+1)+\frac{5}{8}, (m+1)+\frac{7}{8}$

$\vdots$

$(n-1)+\frac{1}{8},\ (n-1)+\frac{3}{8},\ (n-1)+\frac{5}{8},\ (n-1)+\frac{7}{8}$

따라서 m과 n 사이에 있는 유리수 중에서 분모가 8인 기약분수의 합은

$\sum_{k=m}^{n-1}\left(k+\frac{1}{8}\right) + \sum_{k=m}^{n-1}\left(k+\frac{3}{8}\right) + \sum_{k=m}^{n-1}\left(k+\frac{5}{8}\right) + \sum_{k=m}^{n-1}\left(k+\frac{7}{8}\right)$

$= \sum_{k=m}^{n-1}(4k+2)$

$= \sum_{k=1}^{n-1}(4k+2) - \sum_{k=1}^{m-1}(4k+2)$

$= 4\times\frac{(n-1)n}{2} + 2(n-1) - 4\times\frac{(m-1)m}{2} - 2(m-1)$

$= 2n^2 - 2n + 2n - 2 - 2m^2 + 2m - 2m + 2$

$= 2n^2 - 2m^2$

$= -2m^2 + 2n^2$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로

$a^2 + b^2 = (-2)^2 + 2^2 = 8$

답 ②

22

$\sum_{k=1}^{22} |10-k| + \sum_{k=1}^{22} (k-10)$

$= \sum_{k=1}^{22} \{|10-k| + (k-10)\}$

$= \sum_{k=1}^{10} (10-k+k-10) + \sum_{k=11}^{22} \{(-10+k)+(k-10)\}$

$= 0 + \sum_{k=11}^{22} (2k-20)$

$= \sum_{k=1}^{22} (2k-20) - \sum_{k=1}^{10} (2k-20)$

$= \left(2\times\frac{22\times23}{2} - 20\times22\right) - \left(2\times\frac{10\times11}{2} - 20\times10\right)$

$= (506-440) - (110-200)$

$= 66 + 90 = 156$

답 ④

다른 풀이

$\sum_{k=1}^{22} |10-k| + \sum_{k=1}^{22} (k-10)$

$= \sum_{k=1}^{22} \{|10-k| + (k-10)\}$

$= \sum_{k=1}^{10} (10-k+k-10) + \sum_{k=11}^{22} \{(-10+k)+(k-10)\}$

$= 0 + \sum_{k=11}^{22} (2k-20)$

$= \sum_{k=11}^{22} 2(k-10)$

$= \sum_{k=1}^{12} 2k$

$= 2\times\frac{12\times13}{2} = 156$

참고

$\sum_{k=11}^{22} 2(k-10)$에서 $k-10=i$라 하면

$k=11$일 때 $i=1$이고, $k=22$일 때 $i=12$이므로

$\sum_{k=11}^{22} 2(k-10)=\sum_{i=1}^{12} 2i=\sum_{k=1}^{12} 2k$

23

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=(-1)^{n+1}n^2$이므로

$$\begin{aligned}S_{2n}&=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2\\&=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots+\{(2n-1)^2-(2n)^2\}\\&=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+\cdots\\&\qquad+\{(2n-1)-2n\}\{(2n-1)+2n\}\\&=-\{1+2+3+4+\cdots+(2n-1)+2n\}\\&=-\frac{2n(2n+1)}{2}\\&=-2n^2-n\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6} S_{2k}&=\sum_{k=1}^{6}(-2k^2-k)\\&=-2\sum_{k=1}^{6}k^2-\sum_{k=1}^{6}k\\&=-2\times\frac{6\times7\times13}{6}-\frac{6\times7}{2}\\&=-182-21=-203\end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

$$\begin{aligned}S_{2n}&=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2\\&=\{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2\}-\{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2\}\\&=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2-\sum_{k=1}^{n}(2k)^2\\&=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1-4k^2)\\&=\sum_{k=1}^{n}(-4k+1)\\&=-4\times\frac{n(n+1)}{2}+n\\&=-2n^2-n\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6} S_{2k}&=\sum_{k=1}^{6}(-2k^2-k)\\&=-2\sum_{k=1}^{6}k^2-\sum_{k=1}^{6}k\\&=-2\times\frac{6\times7\times13}{6}-\frac{6\times7}{2}\\&=-182-21=-203\end{aligned}$$

24

$f(x)=x^3+x^2-6x+4$라 하면

$f(1)=0$이므로 인수정리와 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x-1)(x^2+2x-4)$

따라서 α, β는 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-4$

$$\begin{aligned}&(\alpha-1)(\beta-1)+(\alpha-2)(\beta-2)+(\alpha-3)(\beta-3)\\&\qquad+\cdots+(\alpha-10)(\beta-10)\\&=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1^2+\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2^2\\&\qquad+\cdots+\alpha\beta-10(\alpha+\beta)+10^2\\&=10\alpha\beta-(\alpha+\beta)(1+2+\cdots+10)+1^2+2^2+\cdots+10^2\\&=10\times(-4)-(-2)\times\frac{10\times11}{2}+\frac{10\times11\times21}{6}\\&=-40+110+385=455\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$f(x)=x^3+x^2-6x+4$라 하면

$f(1)=0$이므로 인수정리와 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x-1)(x^2+2x-4)$

따라서 α, β는 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근이므로

$x^2+2x-4=(x-\alpha)(x-\beta)=(\alpha-x)(\beta-x)$

따라서

$$\begin{aligned}&(\alpha-1)(\beta-1)+(\alpha-2)(\beta-2)+(\alpha-3)(\beta-3)\\&\qquad+\cdots+(\alpha-10)(\beta-10)\\&=\sum_{x=1}^{10}(\alpha-x)(\beta-x)\\&=\sum_{x=1}^{10}(x^2+2x-4)\\&=\frac{10\times11\times21}{6}+2\times\frac{10\times11}{2}-40\\&=385+110-40=455\end{aligned}$$

25

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로

$\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\frac{S_{n+1}-S_n}{S_nS_{n+1}}=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}$

$a_1=S_1=5$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}&=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)\\&=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)\\&=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S_{11}}\end{aligned}$$

에서 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{5}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$

따라서 $S_{11}=30$

답 ①

26

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$a_{2n+1}-a_{2n}=a_{2n}-a_{2n-1}=2$이다.

한편, $\frac{1}{a_{2k-1}a_{2k+1}}=\frac{1}{a_{2k+1}-a_{2k-1}}\left(\frac{1}{a_{2k-1}}-\frac{1}{a_{2k+1}}\right)$이고

$$\begin{aligned}a_{2k+1}-a_{2k-1}&=(a_{2k+1}-a_{2k})+(a_{2k}-a_{2k-1})\\&=2+2=4\end{aligned}$$

이므로

$\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{a_{2k-1}a_{2k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_{2k-1}}-\frac{1}{a_{2k+1}}\right)$

$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{15}}-\frac{1}{a_{17}}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{17}}\right)$

$=\frac{1}{18}$

$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{17}}=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$

$a_{17}=a_1+16\times2=a_1+32$

이므로 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+32}=\frac{2}{9}$

$\frac{32}{a_1(a_1+32)}=\frac{2}{9}$, $a_1(a_1+32)=144$

$a_1^2+32a_1-144=0$, $(a_1+36)(a_1-4)=0$

모든 항이 양수이므로 $a_1=4$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=4+(n-1)\times2=2n+2$

이므로 $a_{20}=42$

답 ②

27

점 A$(0, -1)$에서 함수 $y=\frac{1}{n}x^2$의 그래프에 그은 접선의 기울기를 $m\ (m>0)$이라 하면 접선의 방정식은 $y=mx-1$이다.

$y=\frac{1}{n}x^2$, $y=mx-1$을 연립하면

$\frac{1}{n}x^2=mx-1$

$\frac{1}{n}x^2-mx+1=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=m^2-\frac{4}{n}=0$, $m^2=\frac{4}{n}$

$m>0$이므로 $m=\frac{2}{\sqrt{n}}$

따라서 접선의 방정식은 $y=\frac{2}{\sqrt{n}}x-1$이고

접점의 x좌표 x_n은 ㉠에서

$\frac{1}{n}x_n^2-\frac{2}{\sqrt{n}}x_n+1=0$

$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}x_n-1\right)^2=0$이므로 $x_n=\sqrt{n}$

이때 $y_n=1$이므로 접점은 P$(\sqrt{n}, 1)$이다.

따라서

$\sum_{n=1}^{15} \frac{y_n}{x_n+x_{n+1}}$

$=\sum_{n=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\sum_{n=1}^{15} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$

$=-1+\sqrt{16}=-1+4=3$

답 ①

참고

미분을 이용하여 다음과 같이 점 P의 좌표를 구할 수도 있다.

곡선 $y=\frac{1}{n}x^2$ 위의 점 (x_n, y_n)에서의 접선의 방정식을 구하면

$y-y_n=\frac{2}{n}x_n(x-x_n)$이고 이 접선이 점 $(0, -1)$을 지나므로

$-1-\frac{1}{n}x_n^2=\frac{2}{n}x_n(0-x_n)$

$-1-\frac{1}{n}x_n^2=-\frac{2}{n}x_n^2$

$\frac{1}{n}x_n^2=1$

$x_n^2=n$

$x_n>0$이므로 $x_n=\sqrt{n}$ …… ㉠

㉠을 이차함수식에 대입하면

$y_n=\frac{1}{n}\times n=1$이므로 접점 P의 좌표는 $(\sqrt{n}, 1)$이다.

28

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$a_1=6$, $a_2=3$, $a_3=0$, $a_4=-3$, $a_5=6$, $a_6=3$, $\cdots$

이므로 $a_n=a_{n+4}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$임을 알 수 있다.

이때 $50=4\times12+2$이고, $\sum_{k=1}^{4} a_k=6$이므로

$\sum_{k=1}^{50} a_k=12\sum_{k=1}^{4} a_k+(a_{49}+a_{50})$

$=12\times6+(6+3)$

$=72+9=81$

답 ②

29

$a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$에서

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=2\times2^{n-1}=2^n$

$b_1=2$, $b_{n+1}=b_n+2$에서

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열이므로

$b_n=2+(n-1)\times2=2n$

$\frac{a_n}{2^{b_n}}=\frac{2^n}{2^{2n}}=2^{n-2n}=2^{-n}$이므로

$\frac{a_n}{2^{b_n}}>\frac{1}{1024}$에서

$2^{-n}>\frac{1}{1024}=2^{-10}$

이때 밑이 1보다 크므로

$-n>-10$

$n<10$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 9이다.

답 ④

30

$a_{2n+2}-a_{2n}=p$에서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 a_2이고 공차가 p인 등차수열이므로

$a_{2n}=a_2+(n-1)p$

$\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}=p$에서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a_1이고 공비가 p인 등비수열이므로

$a_{2n-1}=a_1p^{n-1}$, $a_7=a_1p^3=8$ ⋯⋯ ㉠

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 a_1, p도 자연수이다.

따라서 $p=1$ 또는 $p=2$이다.

(i) $p=1$일 때

$a_8=a_2+3=8$에서 $a_2=5$

(ii) $p=2$일 때

$a_8=a_2+6=8$에서 $a_2=2$

(i), (ii)와 $a_2\neq5$에 의하여 $a_2=2$, $p=2$이고 ㉠에서 $a_1=1$이다.

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 $a_1=1$이고 공비가 2인 등비수열이므로

$a_3=2$, $a_5=4$

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_2=2$이고 공차가 2인 등차수열이므로

$a_4=4$, $a_6=6$

따라서

$$\sum_{k=1}^{6}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$$
$$=1+2+2+4+4+6=19$$

답 ③

참고

수열 $\{a_n\}$을 나열하면 다음과 같다.

1, 2, 2, 4, 4, 6, 8, 8, 16, 10, ⋯

31

수열 $\{a_n\}$에서 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례로 대입하면

$a_1=f(1)+f(2)=1^2-2^2=(1-2)(1+2)=-(1+2)$

$a_2=f(2)+f(3)=-2^2+3^2=(3-2)(3+2)=2+3$

$a_3=f(3)+f(4)=3^2-4^2=(3-4)(3+4)=-(3+4)$

$a_4=f(4)+f(5)=-4^2+5^2=(5-4)(5+4)=4+5$

⋮

$a_{49}=f(49)+f(50)=49^2-50^2=(49-50)(49+50)=-(49+50)$

$a_{50}=f(50)+f(51)=-50^2+51^2=(51-50)(51+50)=50+51$

따라서

$$\sum_{k=1}^{50}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{50}$$
$$=-(1+2)+(2+3)-(3+4)+\cdots+(50+51)$$
$$=-1+51=50$$

답 ③

다른 풀이

$a_n=f(n)+f(n+1)$에서

$$a_{2k-1}+a_{2k}=f(2k-1)+f(2k)+f(2k)+f(2k+1)$$
$$=f(2k-1)+2f(2k)+f(2k+1)$$
$$=(2k-1)^2-2(2k)^2+(2k+1)^2$$
$$=4k^2-4k+1-8k^2+4k^2+4k+1$$
$$=2$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{50}a_k=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{49}+a_{50})$$
$$=2+2+\cdots+2$$
$$=2\times25=50$$

32

$a_1=\alpha$, $a_2=\beta$로 놓고 관계식 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례로 대입하여 수열 $\{a_n\}$을 나열하면 다음과 같다.

α, β, $\beta-\alpha$, $-\alpha$, $-\beta$, $\alpha-\beta$, α, β, ⋯

즉, 수열 $\{a_n\}$의 각 항은

α, β, $\beta-\alpha$, $-\alpha$, $-\beta$, $\alpha-\beta$

가 반복되므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$이 성립한다.

한편, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0$이고

$40=6\times6+4$이므로

$$S_{40}=\sum_{k=1}^{36}a_k+a_{37}+a_{38}+a_{39}+a_{40}$$
$$=a_1+a_2+a_3+a_4$$
$$=\alpha+\beta+(\beta-\alpha)+(-\alpha)$$
$$=-\alpha+2\beta=25 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$65=6\times10+5$이므로

$$S_{65}=\sum_{k=1}^{60}a_k+a_{61}+a_{62}+a_{63}+a_{64}+a_{65}$$
$$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$
$$=\alpha+\beta+(\beta-\alpha)+(-\alpha)+(-\beta)$$
$$=-\alpha+\beta=19 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=-13$, $\beta=6$

따라서 $a_1+a_2=\alpha+\beta=-7$

답 ②

다른 풀이

$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$에서

$$a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}$$
$$=(a_{n+1}-a_n)-a_{n+1}=-a_n$$

$a_{n+6}=-a_{n+3}=-(-a_n)=a_n$

따라서 $a_{n+3}=-a_n$, $a_{n+6}=a_n$이므로

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=a_1+a_2+a_3+(-a_1)+(-a_2)+(-a_3)$$
$$=0$$

$40=6\times6+4$이므로

$$S_{40}=\sum_{k=1}^{36}a_k+(a_{37}+a_{38}+a_{39}+a_{40})$$
$$=a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+a_2+a_3+(-a_1)$$
$$=a_2+a_3=25 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$65=6\times10+5$이므로

$$S_{65}=\sum_{k=1}^{60}a_k+(a_{61}+a_{62}+a_{63}+a_{64}+a_{65})$$
$$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=a_1+a_2+a_3+(-a_1)+(-a_2)$$
$$=a_3=19 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡에서 $a_2=6$이고, $a_3=a_2-a_1$이므로

$19=6-a_1$, $a_1=-13$

따라서 $a_1+a_2=-13+6=-7$

33

점 A_1의 좌표가 $(12,\ 6)$이므로 $a_1=12+6=18$

점 A_1의 y좌표와 점 B_1의 y좌표가 같으므로 점 B_1의 좌표를 $(\alpha_1,\ 6)$이라 하자.

점 B_1은 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위에 있으므로 $6=\frac{1}{\alpha_1}$에서 $\alpha_1=\frac{1}{6}$

따라서 점 B_1의 좌표는 $\left(\frac{1}{6},\ 6\right)$이다.

점 B_1의 x좌표와 점 A_2의 x좌표가 같으므로 점 A_2의 좌표를 $\left(\frac{1}{6},\ \beta_2\right)$라 하자.

점 A_2는 직선 $y=\frac{x}{2}$ 위에 있으므로 $\beta_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

따라서 점 A_2의 좌표는 $\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{12}\right)$이므로

$a_2=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

점 A_2의 y좌표와 점 B_2의 y좌표가 같으므로 점 B_2의 좌표를 $\left(\alpha_2,\ \frac{1}{12}\right)$이라 하자.

점 B_2는 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위에 있으므로 $\frac{1}{12}=\frac{1}{\alpha_2}$에서 $\alpha_2=12$

따라서 점 B_2의 좌표는 $\left(12,\ \frac{1}{12}\right)$이다.

점 B_2의 x좌표와 점 A_3의 x좌표가 같으므로 점 A_3의 좌표를 $(12,\ \beta_3)$이라 하자.

점 A_3은 직선 $y=\frac{x}{2}$ 위에 있으므로 $\beta_3=\frac{1}{2}\times 12=6$

따라서 점 A_3의 좌표는 $(12,\ 6)$이므로

$a_3=12+6=18$

점 A_3의 좌표가 점 A_1의 좌표와 같으므로 이후 계속 반복된다.

즉, $a_n=\begin{cases} 18 & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{4} & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$

따라서 $a_7+a_8=18+\frac{1}{4}=\frac{73}{4}$

$p=4,\ q=73$이므로

$p+q=77$

답 77

다른 풀이

점 A_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 하면

점 A_n은 직선 $y=\frac{x}{2}$ 위의 점이므로

$y_n=\frac{x_n}{2}$ …… ㉠

점 B_n의 y좌표가 점 A_n의 y좌표와 같으므로 $\mathrm{B}_n(\alpha,\ y_n)$이라 하면

점 B_n은 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 점이므로 $y_n=\frac{1}{\alpha}$이고 $\alpha=\frac{1}{y_n}$이다.

따라서 $\mathrm{B}_n\left(\frac{1}{y_n},\ y_n\right)$

또한 점 A_{n+1}의 x좌표가 점 B_n의 x좌표와 같으므로

$\mathrm{A}_{n+1}\left(\frac{1}{y_n},\ \beta\right)$라 하면 점 A_{n+1}은 직선 $y=\frac{x}{2}$ 위의 점이므로

$\beta=\frac{\frac{1}{y_n}}{2}=\frac{1}{2y_n}$

점 $\mathrm{A}_{n+1}(x_{n+1},\ y_{n+1})$이므로

$x_{n+1}=\frac{1}{y_n},\ y_{n+1}=\frac{1}{2y_n}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x_{n+1}=\frac{2}{x_n}$이고 $y_{n+1}=\frac{1}{2y_n}$이다.

$a_1=x_1+y_1=12+6=18$

$a_2=x_2+y_2=\frac{2}{x_1}+\frac{1}{2y_1}=\frac{2}{12}+\frac{1}{2\times 6}=\frac{1}{4}$

$a_3=x_3+y_3=\frac{2}{x_2}+\frac{1}{2y_2}=\frac{2}{\frac{1}{6}}+\frac{1}{2\times\frac{1}{12}}=12+6=18$

이므로 수열 $\{a_n\}$의 홀수 번째 항은 18이고 짝수 번째 항은 $\frac{1}{4}$이다.

따라서 $a_7+a_8=18+\frac{1}{4}=\frac{73}{4}$

$p=4,\ q=73$이므로 $p+q=77$

34

(ⅰ) $n=2$일 때,

(좌변)$=1^2+2^2+1^2=6$

(우변)$=\frac{2\times(2\times 2^2+1)}{3}=\frac{18}{3}=6$

이므로 (∗)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m\ (m\geq 2)$일 때, (∗)이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2+m^2+(m-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$

$=\frac{m(2m^2+1)}{3}$

이다.

위 등식의 양변에 $\boxed{(m+1)^2+m^2}$을 더하여 정리하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2+m^2+\boxed{(m+1)^2+m^2}+(m-1)^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$

$=\frac{m(2m^2+1)}{3}+\boxed{(m+1)^2+m^2}$

$=\frac{m(2m^2+1)+3m^2}{3}+(m+1)^2$

$=\frac{m(2m+1)(m+1)}{3}+\boxed{(m+1)^2}$

$=\frac{m(2m+1)(m+1)+3(m+1)^2}{3}$

$=\frac{(m+1)(2m^2+4m+3)}{3}$

$=\frac{(m+1)\{2(m+1)^2+1\}}{3}$

이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 (∗)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 (∗)이 성립한다.

따라서 $f(m)=(m+1)^2+m^2,\ g(m)=(m+1)^2$이므로

$f(3)=4^2+3^2=16+9=25,\ g(4)=5^2=25$

$f(3)+g(4)=25+25=50$

답 50

04 함수의 극한과 연속

정답 본문 46~57쪽

01 ②	02 ③	03 ③	04 ③	05 ①
06 ①	07 ②	08 40	09 ⑤	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 10	14 7	15 ⑤
16 ⑤	17 ④	18 ④	19 18	20 ④
21 ④	22 ⑤	23 ①	24 ④	25 ④
26 ⑤	27 13	28 ①	29 ①	30 ③
31 ③	32 ②	33 ②	34 ④	35 ②
36 16	37 ③	38 ⑤		

01

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to-1+} f(x)=0,\ \lim_{x\to1-} f(x)=2$

또한 $\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to2} f(x)=1$이고 $f(2)=2$

따라서 $\lim_{x\to-1+} f(x)+\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to2} f(x)+kf(2)$에서

$0+2=1+2k$

이므로 $k=\frac{1}{2}$

답 ②

02

극한값 $\lim_{x\to1} f(x)$가 존재하므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)$

즉, $\lim_{x\to1-} \frac{a}{x+7}=\lim_{x\to1+} (x+2)$에서

$\frac{a}{1+7}=3,\ a=24$

한편, $\lim_{x\to b+} f(x)=\infty$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 직선

$x=-7$이므로

$b=-7$

따라서 $a+b=24+(-7)=17$

답 ③

03

$f(x)=\frac{|x-3||x-2|(x+a)}{(x-3)(x-2)}$에서

$x>3$일 때,

$f(x)=\frac{(x-3)(x-2)(x+a)}{(x-3)(x-2)}=x+a$

$x<1$일 때,

$f(x)=\frac{(x-3)(x-2)(x+a)}{(x-3)(x-2)}=x+a$

이므로

$\lim_{x\to3+} f(x)+\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to3+} (x+a)+\lim_{x\to1-} (x+a)$

$=(3+a)+(1+a)$

$=2a+4=10$

따라서 $a=3$

답 ③

04

집합 A에서

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)-1$, 즉

$\lim_{x\to a+} f(x)-\lim_{x\to a-} f(x)=-1$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$a=2$일 때, $\lim_{x\to2+} f(x)=0,\ \lim_{x\to2-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to2+} f(x)-\lim_{x\to2-} f(x)=-1$

$a=0$일 때, $\lim_{x\to0+} f(x)=0,\ \lim_{x\to0-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to0+} f(x)-\lim_{x\to0-} f(x)=-1$

$a=-1$일 때, $\lim_{x\to-1+} f(x)=0,\ \lim_{x\to-1-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to-1+} f(x)-\lim_{x\to-1-} f(x)=-1$

$A=\{-1, 0, 2\}$ …… ㉠

집합 B에서

$\lim_{x\to a+} f(x)>\lim_{x\to a-} f(x)$, 즉

$\lim_{x\to a+} f(x)-\lim_{x\to a-} f(x)>0$

$a=1$일 때, $\lim_{x\to1+} f(x)=3,\ \lim_{x\to1-} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to1+} f(x)-\lim_{x\to1-} f(x)>0$

$B=\{1\}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $A\cup B=\{-1, 0, 1, 2\}$

집합 C에서

$\lim_{x\to a+} f(x)<\lim_{x\to a-} \{f(x)\}^2$, 즉

$\lim_{x\to a-} \{f(x)\}^2-\lim_{x\to a+} f(x)>0$

a가 정수일 때,

$a=2, 0, -1, 1$의 좌극한값과 우극한값에서

$\lim_{x\to a-} \{f(x)\}^2-\lim_{x\to a+} f(x)>0$이다.

a가 정수가 아닐 때,

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=p$라 하면

$p^2-p>0,\ p(p-1)>0$에서

$p<0$ 또는 $p>1$

그러므로 $\frac{1}{2}<a<1,\ 1<a<2$

$C=\{-1, 0, 1, 2\}\cup\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<1\right\}\cup\{x|1<x<2\}$

따라서

$C-(A\cup B)=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x<1\right\}\cup\{x|1<x<2\}$

답 ③

05

함수 $f(x)=ax\ (a-1\le x<a)$에서 a는 정수이므로

$$f(x)=\begin{cases} \vdots \\ -2x & (-3\le x<-2) \\ -x & (-2\le x<-1) \\ 0 & (-1\le x<0) \\ x & (0\le x<1) \\ 2x & (1\le x<2) \\ 3x & (2\le x<3) \\ \vdots \end{cases}$$

$\lim_{x\to(p+2)-} f(x)=\lim_{x\to(p+2)-}\{(p+2)x\}=(p+2)^2$

$\lim_{x\to p+} f(x)=\lim_{x\to p+}\{(p+1)x\}=p(p+1)$

따라서 $\lim_{x\to(p+2)-} f(x)-\lim_{x\to p+} f(x)=157$에서

$(p+2)^2-p(p+1)=157$

$3p+4=157$

이므로 $p=51$

답 ①

06

$$\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-(x+2)g(x)}{f(x)g(x)+2g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\{f(x)\}^2}{x}-(x+2)\frac{g(x)}{x}}{f(x)\times\frac{g(x)}{x}+2\times\frac{g(x)}{x}}$$

$$=\frac{16-3k}{4k+2k}$$

$$=\frac{16-3k}{6k}=\frac{1}{3}$$

에서 $3(16-3k)=6k$

$15k=48$

따라서 $k=\frac{16}{5}$

답 ①

07

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 x축 위의 한 점 $(a,\ 0)$ ($a\ne2$인 상수)에서만 만나고 $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로

$f(x)=(x-a)(x-2)$, $g(x)=(x-a)(x-b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to1}f(x)$, $\lim_{x\to1}g(x)$가 모두 존재하므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)+2g(x)\}$

$=\lim_{x\to1}f(x)+2\lim_{x\to1}g(x)$

$=\lim_{x\to1}(x-a)(x-2)+2\lim_{x\to1}(x-a)(x-b)$

$=a-1+2(1-a)(1-b)=0$ …… ㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-a)(x-2)}{(x-a)(x-b)}=\frac{1-2}{1-b}=\frac{1}{b-1}=\frac{1}{3}$$

에서 $b=4$

㉠에 $b=4$를 대입하면 $a-1-6(1-a)=0$이므로

$7a=7$, $a=1$

그러므로 $f(x)=(x-1)(x-2)$, $g(x)=(x-1)(x-4)$

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=\lim_{x\to0}(x-1)^2(x-2)(x-4)=8$

답 ②

08

$g(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하자.

$\lim_{x\to1}f(x+1)g(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to1-}f(x+1)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x+1)g(x)$, 즉

$-1\times g(1)=1\times g(1)$에서

$2g(1)=0$, $g(1)=0$

$1+a+b=0$, $a+b=-1$ …… ㉠

$\lim_{x\to2}f(x)g(x+1)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to2-}f(x)g(x+1)=\lim_{x\to2+}f(x)g(x+1)$, 즉

$-1\times g(3)=1\times g(3)$에서

$2g(3)=0$, $g(3)=0$

$27+9a+3b=0$, $3a+b=-9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-4$, $b=3$

따라서 $g(x)=x^3-4x^2+3x$이므로

$g(5)=5^3-4\times5^2+3\times5=40$

답 40

09

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+4)+x^4-16}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+4)+(x^2+4)(x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+4)\{1+(x+2)\}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)(x^2+4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(x+3)(x^2+4)$$

$=40$

답 ⑤

10

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^3+x}-\frac{1}{x^2+x}+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x(x^2+1)}-\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x+1-(x^2+1)}{x(x^2+1)(x+1)}+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x(1-x)}{x(x^2+1)(x+1)}+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-x}{(x^2+1)(x+1)}+\frac{2}{x^3+x^2+x+1}\right\}$$

$=1+2=3$

답 ③

11

함수 $y=f(x)$의 그래프는 점근선이 직선 $x=-a$이고

$\lim_{x\to 2+}\frac{1}{x+a}=\infty$이므로 $a=-2$

$\lim_{x\to 5}f(x)g(x)=\frac{1}{3}$에서

$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+b}-1}{x-2}=\frac{1}{3}$

$\frac{\sqrt{5+b}-1}{3}=\frac{1}{3}$, $\sqrt{5+b}=2$, $5+b=4$

$b=-1$

따라서

$$\lim_{x\to 2}f(x)g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

12

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}-x^3-x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}-(x^3+x)\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}-(x^3+x)\}\{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}+(x^3+x)\}}{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}+x^3+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-x^2}{\sqrt{x^6+2x^4+4x^3}+x^3+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}+1+\frac{1}{x^2}}=\frac{4}{1+1}=2$$

답 ④

13

부등식의 각 변을 x^2으로 나누면

$$\frac{5}{x^2(x^2+10)}\le f(x)\le\frac{5}{x^2(x^2+1)}$$

각 변에 $2x^4+5$를 곱하면

$$\frac{5(2x^4+5)}{x^2(x^2+10)}\le(2x^4+5)f(x)\le\frac{5(2x^4+5)}{x^2(x^2+1)}$$

이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5(2x^4+5)}{x^2(x^2+10)}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{25}{x^4}}{1+\frac{10}{x^2}}=10$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5(2x^4+5)}{x^2(x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{25}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}=10$$

따라서 $\lim_{x\to\infty}(2x^4+5)f(x)=10$

답 10

14

$f(x)=\sum_{k=1}^{200}x^k=x+x^2+x^3+\cdots+x^{200}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3n^2}(x^{4n}+x^{3n})}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3n^2+4n}+x^{3n^2+3n}}{x+x^2+x^3+\cdots+x^{200}}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

$\lim_{x\to\infty}(x+x^2+x^3+\cdots+x^{200})=\infty$

$\lim_{x\to\infty}(x^{3n^2+4n}+x^{3n^2+3n})=\infty$이므로 ㉠이 수렴하기 위해서는 분자의 최고차항의 차수가 분모의 최고차항의 차수보다 작거나 같아야 한다.

즉, $3n^2+4n\le 200$, $n(3n+4)\le 200$에서

$n(3n+4)$는 $n=7$일 때 175, $n=8$일 때 224이므로

부등식을 만족시키는 자연수 n은 1, 2, 3, $\cdots$, 7이다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 개수는 7이다.

답 7

15

$\lim_{x\to 3}\frac{x^3+ax^2-3x}{(x-3)(x+b)}=12$이고, $x\to 3$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 3}(x^3+ax^2-3x)=18+9a=0$에서 $a=-2$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x^2-3x}{(x-3)(x+b)}=\lim_{x\to 3}\frac{x(x^2-2x-3)}{(x-3)(x+b)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x(x+1)(x-3)}{(x-3)(x+b)}$$

$\lim_{x\to 3}\frac{x(x+1)}{x+b}=12$에서 $\frac{12}{3+b}=12$, $b=-2$

따라서 $a+b=-2+(-2)=-4$

답 ⑤

16

$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+2ax+a+b}=-\frac{1}{2}$에서 $x\to 2$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}(x^2+2ax+a+b)=0$에서

$b=-4-5a\quad\cdots\cdots\ ㉠$

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+2ax+a+b}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+2ax-4-4a}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x^2-4)+2a(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2+2a)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2+2a}$$
$$=\frac{1}{4+2a}=-\frac{1}{2}$$

$4+2a=-2$에서 $a=-3$

㉠에서 $b=11$이므로

$a+b=8$

답 ⑤

17

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{\sqrt{x+b}-2}=16$에서 $x\to1$일 때, (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to1}(\sqrt{x+b}-2)=0$에서

$\sqrt{1+b}-2=0$, $\sqrt{1+b}=2$, $1+b=4$, $b=3$

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}{\sqrt{x+3}-2}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\{(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})(\sqrt{x+3}+2)\}$

$=8\sqrt{1+a}=16$

$\sqrt{1+a}=2$, $1+a=4$, $a=3$

따라서 $a+b=3+3=6$

답 ④

18

$\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)f(x)}{x+2}=0$이고, $x\to-2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to-2}(x+1)f(x)=-f(-2)=0$에서

$f(-2)=0$

$f(x)=(x+2)(x+a)$ (a는 상수) …… ㉠

이라 하면

$\lim_{x\to-2}\frac{(x+1)(x+2)(x+a)}{x+2}=0$에서

$\lim_{x\to-2}(x+1)(x+a)=0$

$-(-2+a)=0$, $a=2$이므로

㉠에서 $f(x)=(x+2)^2$

따라서 $f(3)=5^2=25$

답 ④

19

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자.

$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)}{f(x+1)}$의 값이 존재하여야 하므로

$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)}{f(x+1)}$에서 $x\to0+$일 때, (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)=0$

그러므로 $b=0$이고 $g(x)=x^2+ax$ …… ㉠

한편, $\lim_{x\to2+}\frac{g(x+1)}{f(x)}$의 값이 존재하여야 하므로

$\lim_{x\to2+}\frac{g(x+1)}{f(x)}$에서 $x\to2+$일 때, (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to2+}g(x+1)=g(3)=0$

㉠에서 $3^2+3a=0$, $a=-3$

따라서 $g(x)=x^2-3x$이므로

$g(6)=6^2-18=18$

답 18

20

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=0$이므로

$f(x)$의 차수를 n이라 하면 $n\le3$이고 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 함수 $f(x)$는 삼차함수이다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a는 소수)라 하자.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=8$이고, $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

그러므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ (a는 소수)

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{ax^3+bx^2+cx}{x}$

$=\lim_{x\to0}(ax^2+bx+c)$

$=c=8$

$f(x)=ax^3+bx^2+8x=x(ax^2+bx+8)$

a가 소수이고 방정식 $f(x)=0$의 근이 음이 아닌 서로 다른 세 정수이므로 양의 정수 p, q에 대하여

$f(x)=x(x-p)(ax-q)$ (단, $pq=8$)

a가 소수이고 $\frac{q}{a}$가 음이 아닌 정수이기 위해서는 $q\ne1$이어야 하므로 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 생각한다.

(i) $p=1$, $q=8$일 때

$x(x-1)(ax-8)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\frac{8}{a}$

이므로 $a=2$

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$

(ii) $p=2$, $q=4$일 때

$x(x-2)(ax-4)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{4}{a}$

이므로 $a=2$

$x=0$ 또는 $x=2$

이때 방정식 $f(x)=0$의 근은 서로 다른 두 개이므로 적합하지 않다.

(iii) $p=4$, $q=2$일 때

$x(x-4)(ax-2)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=4$ 또는 $x=\frac{2}{a}$

이므로 $a=2$

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$

따라서 (i), (ii), (iii)에서

$a=2$, $f(x)=2x(x-1)(x-4)$

이므로

$a+f(5)=2+40=42$

답 ④

21

점 P의 좌표가 $P(t,\ 2t^2+3)$이고

$Q\left(t,\ \frac{1}{3}t^2\right)$, $H(t,\ 0)$이므로

$\overline{PQ}=2t^2+3-\frac{1}{3}t^2=\frac{5}{3}t^2+3$

$\overline{QH}=\frac{1}{3}t^2$

따라서 $A(t)=\left(\frac{5}{3}t^2+3\right)\pi$, $B(t)=\frac{1}{3}t^2\pi$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{B(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{3}t^2+3\right)\pi}{\frac{1}{3}t^2\pi}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{5t^2+9}{t^2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(5+\frac{9}{t^2}\right)=5$$

답 ④

22

점 P의 좌표는 $P(t,\ 2t+1)$이고

$t>4$에서 $2t+1>9$

$\overline{QH_1}=t-4$이므로 삼각형 PQH_1의 넓이는

$A(t)=\frac{1}{2}\times(t-4)\times(2t+1)$

$\quad=\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-4)$

$\overline{RH_2}=2t+1-5=2(t-2)$이므로 삼각형 PH_2R의 넓이는

$B(t)=\frac{1}{2}\times2(t-2)\times t=t(t-2)$

$$\lim_{t\to4+}\frac{tA(t)}{(t-4)B(t)}=\lim_{t\to4+}\frac{t\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-4)}{(t-4)t(t-2)}$$
$$=\lim_{t\to4+}\frac{t+\frac{1}{2}}{t-2}=\frac{9}{4}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{B(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-4)}{t(t-2)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2-\frac{7}{2}t-2}{t^2-2t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1-\frac{7}{2t}-\frac{2}{t^2}}{1-\frac{2}{t}}=1$$

따라서 $\lim_{t\to4+}\frac{tA(t)}{(t-4)B(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{B(t)}=\frac{9}{4}+1=\frac{13}{4}$

답 ⑤

23

$x=\sqrt{2x}$에서

$x^2=2x$, $x(x-2)=0$이므로 $x=2$

$A(2,\ 2)$, $B(2,\ 0)$이고

$Q(t,\ \sqrt{2t})$, $R(t,\ 0)$이므로

$\overline{PB}=\sqrt{(t-2)^2+t^2}=\sqrt{2t^2-4t+4}$

$\overline{QB}=\sqrt{(t-2)^2+2t}=\sqrt{t^2-2t+4}$

$\overline{BR}=t-2$

$\overline{OR}=t$

따라서

$$\lim_{t\to2+}\frac{\overline{PB}-\overline{QB}}{\overline{BR}\times\overline{OR}}$$
$$=\lim_{t\to2+}\frac{\sqrt{2t^2-4t+4}-\sqrt{t^2-2t+4}}{t(t-2)}$$
$$=\lim_{t\to2+}\frac{(2t^2-4t+4)-(t^2-2t+4)}{t(t-2)(\sqrt{2t^2-4t+4}+\sqrt{t^2-2t+4})}$$
$$=\lim_{t\to2+}\frac{t(t-2)}{t(t-2)(\sqrt{2t^2-4t+4}+\sqrt{t^2-2t+4})}$$
$$=\lim_{t\to2+}\frac{1}{\sqrt{2t^2-4t+4}+\sqrt{t^2-2t+4}}$$
$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

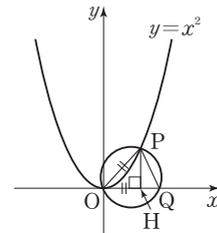
답 ①

24

점 P의 좌표 $P(t,\ t^2)$ $(t>0)$에 대하여

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+(t^2)^2}=t\sqrt{1+t^2}$이므로

$Q(t\sqrt{1+t^2},\ 0)$

$\overline{PQ}^2=(t\sqrt{1+t^2}-t)^2+t^4=2t^4+2t^2-2t^2\sqrt{1+t^2}$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$H(t,\ 0)$

$\angle POH=\theta$라 하면 직각삼각형 POH에서

$\sin\theta=\frac{\overline{PH}}{\overline{OP}}=\frac{t^2}{t\sqrt{1+t^2}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

삼각형 POQ의 외접원에 대하여 사인법칙에서

$A(t)=\frac{\overline{PQ}}{\sin\theta}$이므로

$$\{A(t)\}^2=\frac{\overline{PQ}^2}{\sin^2\theta}=\frac{2t^4+2t^2-2t^2\sqrt{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}}$$
$$=2(t^2+1)^2-2\sqrt{1+t^2}(1+t^2)$$
$$=2t^4+4t^2+2-2\sqrt{1+t^2}(1+t^2)$$

따라서

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\{A(t)\}^2}{t^4}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^4+4t^2+2-2\sqrt{1+t^2}(1+t^2)}{t^4}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{2+\frac{4}{t^2}+\frac{2}{t^4}-2\sqrt{\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}}\left(\frac{1}{t^2}+1\right)\right\}$$
$$=2$$

답 ④

25

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x \to 0} f(x)=f(0)$, 즉

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x+a}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}}=b$$

에서 $x \to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x \to 0}(2x+a)=a=0$

$$b=\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}}$$
$$=\lim_{x \to 0} \frac{2x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})}{(\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x})(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})}$$
$$=\lim_{x \to 0} \frac{2x(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x})}{6x}$$
$$=\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}}{3}=\frac{2}{3}$$

따라서 $a+b=0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

답 ④

26

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)=-6$

$x \neq 1$일 때, $f(x)=\frac{x^2+4x-5+2g(x)}{x-1}$이므로

$$\lim_{x \to 1} f(x)=\lim_{x \to 1} \frac{x^2+4x-5+2g(x)}{x-1}=-6$$

$x \to 1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 하고,

$2g(1)=0$에서 $g(1)=0$

$g(x)=(x-1)(x+k)$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x \to 1} f(x)=\lim_{x \to 1} \frac{x^2+4x-5+2(x-1)(x+k)}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+5)+2(x-1)(x+k)}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1}(3x+5+2k)$$
$$=8+2k=-6$$

에서 $k=-7$

그러므로 $x \neq 1$일 때,

$$f(x)=\frac{3(x-1)(x-3)}{x-1}=3(x-3)$$

따라서 $f(10)=21$

답 ⑤

27

(i) $x=0$일 때, $f(0)=0$

(ii) $x \neq 0$일 때, $f(x)=\frac{x^{n+15}(1+x^{2n+1})}{x^{2n+1}}$

그러므로 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x \to 0} f(x)=f(0)$이어야 하므로

$\lim_{x \to 0} f(x)=0$이다.

(i) $n+15>2n+1$에서 $n<14$

$1 \le n \le 13$일 때,

$\lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0} x^{14-n}(1+x^{2n+1})=0$

(ii) $n+15=2n+1$에서 $n=14$

$n=14$일 때,

$\lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0}(1+x^{29})=1$

(iii) $n+15<2n+1$에서 $n>14$

$n \ge 15$일 때,

$\lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0} \frac{1+x^{2n+1}}{x^{n-14}}=\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^{n-14}}+x^{n+15}\right)$의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이기 위한 n의 값의 범위는 $1 \le n \le 13$이므로 자연수 n의 최댓값은 13이다.

답 13

28

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to -1-} f(x)=\lim_{x \to -1-}\left|-\frac{2}{x}-2\right|=0$

$\lim_{x \to -1+} f(x)=\lim_{x \to -1+}(-x^2+k_1)=-1+k_1$

$f(-1)=-(-1)^2+k_1=-1+k_1$

이므로 $-1+k_1=0$에서 $k_1=1$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x)=\lim_{x \to 1-}(-x^2+1)=0$

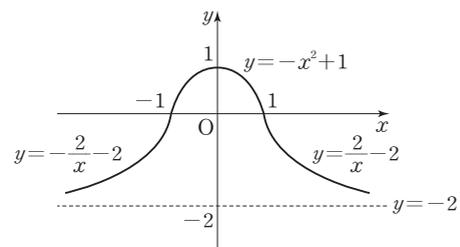
$\lim_{x \to 1+} f(x)=\lim_{x \to 1+}\left|\frac{2}{x}+k_2\right|=|2+k_2|$

$f(1)=\left|\frac{2}{1}+k_2\right|=|2+k_2|$

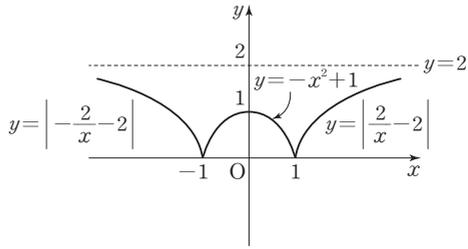
이므로 $|2+k_2|=0$에서 $k_2=-2$

한편, $-1 \le x<1$일 때, $y=-x^2+1$의 그래프는 $y=-x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.

$x \ge 1$일 때, $y=\frac{2}{x}-2$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선이 직선 $y=-2$이고

$x<-1$일 때, $y=-\frac{2}{x}-2$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}-2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프이므로 그래프는 다음 그림과 같다.

그러므로 함수 $y=f(x)$와 그 그래프는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} \left|-\frac{2}{x}-2\right| & (x<-1) \\ -x^2+1 & (-1 \le x<1) \\ \left|\frac{2}{x}-2\right| & (x \ge 1) \end{cases}$$

$y=\left|-\frac{2}{x}-2\right|$, $y=-x^2+1$, $y=\left|\frac{2}{x}-2\right|$, $y=2$

그러므로 직선 $y=a$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수인 함수 $g(a)$는 다음과 같다.

$$g(a)=\begin{cases} 0 & (a\geq 2) \\ 2 & (1<a<2) \\ 3 & (a=1) \\ 4 & (0<a<1) \\ 2 & (a=0) \\ 0 & (a<0) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(a)$는 $a=0$, 1, 2에서 불연속이므로 구하는 모든 실수 t의 값의 합은

$0+1+2=3$

답 ①

29

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=\frac{8}{3}$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(2x+a)=a$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{3}{8}\left(b-\frac{3}{4}n\right)x=0$

$f(0)=\frac{3}{8}\left(b-\frac{3}{4}n\right)\times 0=0$

에서 $a=0$

또한 $\lim_{x\to \frac{8}{3}-} f(x)=\lim_{x\to \frac{8}{3}-}\frac{3}{8}\left(b-\frac{3}{4}n\right)x=b-\frac{3}{4}n$

$\lim_{x\to \frac{8}{3}+} f(x)=\lim_{x\to \frac{8}{3}+}(3x-8)=0$

$f\left(\frac{8}{3}\right)=0$에서 $b-\frac{3}{4}n=0$, 즉

$b=\frac{3}{4}n$ (n은 자연수)

그러므로 $a+b=\frac{3}{4}n$ (n은 자연수)이고

$0<\frac{3}{4}n<10$에서 $0<n<\frac{40}{3}<14$이므로

$a+b=b=\frac{3}{4}, \frac{6}{4}, \frac{9}{4}, \cdots, \frac{39}{4}$

따라서 모든 순서쌍 (a, b)의 개수 $p=13$이고 모든 실수 b의 값의 합은 첫째항이 $\frac{3}{4}$이고 공차가 $\frac{3}{4}$인 등차수열의 제1항부터 제13항까지의 합이므로

$$q=\frac{13\left(\frac{3}{4}+\frac{39}{4}\right)}{2}=\frac{273}{4}$$

따라서 $q-p=\frac{273}{4}-13=\frac{221}{4}$

답 ①

30

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 2}g(x)=g(2)$

조건 (가)에서 $\lim_{x\to 2}g(x)=1$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)>0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\{f(x)\}^2&=\lim_{x\to 2}\{f(x)\times f(x)\}\\&=\lim_{x\to 2}f(x)\times\lim_{x\to 2}f(x)\\&=\{f(2)\}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)\}^2-g(x)}{x^2+2f(x)+g(x)}&=\frac{\lim_{x\to 2}[\{f(x)\}^2-g(x)]}{\lim_{x\to 2}\{x^2+2f(x)+g(x)\}}\\&=\frac{\{f(2)\}^2-1}{2^2+2f(2)+1}=3\end{aligned}$$

에서 $\{f(2)\}^2-6f(2)-16=0$

$\{f(2)+2\}\{f(2)-8\}=0$

$f(2)>0$이므로 $f(2)=8$

따라서 $f(2)+\lim_{x\to 2}g(x)=8+1=9$

답 ③

31

함수 $f(x)+g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1-}\{f(x)+g(x)\}&=\lim_{x\to -1-}\{(x^2+ax-1)+(2x+1)\}\\&=\lim_{x\to -1-}\{x^2+(a+2)x\}\\&=-a-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1+}\{f(x)+g(x)\}&=\lim_{x\to -1+}\{(x+b)+(2x+1)\}\\&=\lim_{x\to -1+}(3x+b+1)\\&=b-2\end{aligned}$$

$f(-1)+g(-1)=-a-1$

이므로 $-a-1=b-2$

$a+b=1$ …… ㉠

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-}\{f(x)+g(x)\}&=\lim_{x\to 1-}\{(x+b)+(2x+1)\}\\&=\lim_{x\to 1-}(3x+b+1)\\&=b+4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}\{f(x)+g(x)\}&=\lim_{x\to 1+}\{(x^2+ax-1)+(2x+1)\}\\&=\lim_{x\to 1+}\{x^2+(a+2)x\}\\&=a+3\end{aligned}$$

$f(1)+g(1)=a+3$

이므로 $a+3=b+4$

$a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=0$

따라서 $3a+2b=3+0=3$

답 ③

32

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1+} g(x)=g(1)$이어야 한다.

$$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1-}(x^2+a)f(x)$$
$$=\lim_{x\to 1-}(x^2+a)\times\lim_{x\to 1-}f(x)$$
$$=(1+a)\times 0=0$$
$$\lim_{x\to 1+} g(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2+a)f(x)$$
$$=\lim_{x\to 1+}(x^2+a)\times\lim_{x\to 1+}f(x)$$
$$=(1+a)\times 2=2a+2$$

$g(1)=(1+a)f(1)=(1+a)\times 0=0$

따라서 $2a+2=0$에서 $a=-1$

답 ②

33

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서만 불연속이고 함수 $g_1(x)$가 $x=-1$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)g_1(x)$가 $x=-1$에서 연속이어야 구간 $(-2, 2)$에서 연속이다.

$\lim_{x\to -1-} f(x)g_1(x)=(-1)\times 1=-1$

$\lim_{x\to -1+} f(x)g_1(x)=1\times(-1)=-1$

$f(-1)g_1(-1)=0\times 0=0$

이므로 $\lim_{x\to -1} f(x)g_1(x)\neq f(-1)g_1(-1)$

따라서 함수 $f(x)g_1(x)$는 구간 $(-2, 2)$에서 연속이 아니다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서만 불연속이고 함수 $g_2(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 함수 $f(x)g_2(x)$가 $x=-1$에서 연속이어야 구간 $(-2, 2)$에서 연속이다.

$\lim_{x\to -1-} f(x)g_2(x)=(-1)\times 0=0$

$\lim_{x\to -1+} f(x)g_2(x)=1\times 0=0$

$f(-1)g_2(-1)=0\times 0=0$

이므로 $\lim_{x\to -1} f(x)g_2(x)=f(-1)g_2(-1)$이 되어

함수 $f(x)g_2(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)g_2(x)$는 구간 $(-2, 2)$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서만 불연속이고 함수 $g_3(x)$가 $x=-1, 1$에서 불연속이므로 함수 $f(x)g_3(x)$가 $x=-1, 1$에서 연속이어야 구간 $(-2, 2)$에서 연속이다.

$\lim_{x\to -1-} f(x)g_3(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)g_3(x)=0$

$f(-1)g_3(-1)=0\times 1=0$

이므로 함수 $f(x)g_3(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 1-} f(x)g_3(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)g_3(x)=0$

$f(1)g_3(1)=1\times 1=1$

이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)g_3(x)\neq f(1)g_3(1)$

따라서 함수 $f(x)g_3(x)$는 구간 $(-2, 2)$에서 연속이 아니다.

이상에서 함수 $f(x)g_k(x)$가 구간 $(-2, 2)$에서 연속인 것은 ㄴ이다.

답 ②

34

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 모든 실수 x에 대하여

$f(x)\neq 0$이고 $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(1)}{f(1)}$이어야 한다.

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 1-}\frac{x+2a}{-x+3}=\frac{2a+1}{2}$

$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 1+}\frac{-x-1}{x^2+ax+4}=\frac{-2}{a+5}$

$\frac{g(1)}{f(1)}=\frac{-2}{a+5}$

즉, $\frac{2a+1}{2}=\frac{-2}{a+5}$

$(2a+1)(a+5)=-4$

$2a^2+11a+9=0$, $(a+1)(2a+9)=0$

이므로

$a=-1$ 또는 $a=-\frac{9}{2}$

(i) $a=-1$일 때

$f(x)>0$이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(ii) $a=-\frac{9}{2}$일 때

$x\geq 1$에서 $f(x)=x^2-\frac{9}{2}x+4=0$인 실수 x가 존재하므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 연속이 아니다.

(i), (ii)에서 $a=-1$

답 ④

35

조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1+} g(x)=g(1)$이어야 한다.

$\lim_{x\to 1-} f(x)=4$

$x\to 1-$일 때, $x+1\to 2-$이고 $f(x)=f(x+2)$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x+1)=\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=k$에서

$\lim_{x\to 1-}\{(k+1)f(x+1)\}=k(k+1)$

$$\lim_{x\to 1-} g(x)=\lim_{x\to 1-}\{f(x)+(k+1)f(x+1)\}$$
$$=\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 1-}\{(k+1)f(x+1)\}$$
$$=4+k(k+1)=k^2+k+4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to 1+$일 때, $f(x)=f(x+2)$이므로 $x\to -1+$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)=-1+k$

$x\to 1+$일 때, $x+1\to 2+$이고 $f(x)=f(x+2)$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x+1)=\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=3$

$\lim_{x\to 1+}\{(k+1)f(x+1)\}=3(k+1)$이므로

$\lim_{x\to1+} g(x)=\lim_{x\to1+}\{f(x)+(k+1)f(x+1)\}$

$=\lim_{x\to1+} f(x)+\lim_{x\to1+}\{(k+1)f(x+1)\}$

$=-1+k+3(k+1)=4k+2$ ······ ㉡

$g(1)=f(1)+(k+1)f(2)$

$=f(-1)+(k+1)f(0)=4k+2$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $k^2+k+4=4k+2$이어야 하므로

$k^2-3k+2=0$, $(k-1)(k-2)=0$

$k=1$ 또는 $k=2$

조건 (가)에서 $f(-1)=-1+k>0$이므로 $k=2$

따라서 $-1\le x<0$일 때, $f(x)=x+2$이므로

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}+2=\frac{5}{3}$

답 ②

36

이차방정식 $3x^2-2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a=a(a-3)$이므로

$a(a-3)<0$, 즉 $0<a<3$일 때

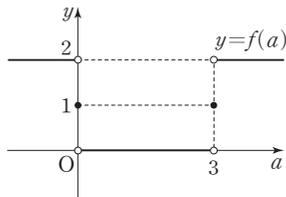
$f(a)=0$

$a(a-3)=0$, 즉 $a=0$ 또는 $a=3$일 때

$f(a)=1$

$a(a-3)>0$, 즉 $a<0$ 또는 $a>3$일 때

$f(a)=2$

따라서 함수 $y=f(a)$의 그래프는 다음과 같다.

함수 $\frac{1}{2}g(a)-8$이 $a=3$에서 연속이므로

$\lim_{a\to3}\left\{\frac{1}{2}g(a)-8\right\}=\frac{1}{2}g(3)-8$이다.

함수 $f(a)\left\{\frac{1}{2}g(a)-8\right\}$이 $a=3$에서 연속이므로

$\lim_{a\to3-} f(a)\left\{\frac{1}{2}g(a)-8\right\}=0\times\left\{\frac{1}{2}g(3)-8\right\}=0$

$\lim_{a\to3+} f(a)\left\{\frac{1}{2}g(a)-8\right\}=2\times\left\{\frac{1}{2}g(3)-8\right\}=g(3)-16$

$f(3)\left\{\frac{1}{2}g(3)-8\right\}=1\times\left\{\frac{1}{2}g(3)-8\right\}=\frac{1}{2}g(3)-8$

에서 $g(3)-16=0=\frac{1}{2}g(3)-8$

따라서 $g(3)=16$

답 16

37

$f(x)=x^3+ax+1$이라 하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 삼차방정식 $f(x)=0$은 세 열린구간 $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 하나씩 실근을 가져야 한다.

$f(-1)f(-2)=-a(-2a-7)<0$, $a(2a+7)<0$에서

$-\frac{7}{2}<a<0$ ······ ㉠

이면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$에서 실근을 갖는다.

마찬가지로 $f(0)f(1)=a+2<0$에서

$a<-2$ ······ ㉡

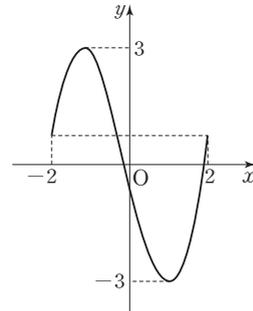
마찬가지로 $f(1)f(2)=(a+2)(2a+9)<0$에서

$-\frac{9}{2}<a<-2$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-\frac{7}{2}<a<-2$이므로 구하는 정수 a는 -3이다.

답 ③

38

조건 (가)에 의하여 $-2\le x\le2$에서 $f(x)=3$과 $f(x)=-3$을 만족시키는 x가 각각 오직 한 개씩 있고 조건 (나)에 의하여 $f(x)=f(x+4)$이므로 3과 -3은 이 구간에서 각각 최댓값과 최솟값이고 이 구간에서 그래프의 개형의 예를 들면 다음 그림과 같다.

ㄱ. 조건 (나)에서 $f(x)=f(x+4)$이므로 $f(-2)=f(2)$이다. (참)

ㄴ. 조건 (나)에서 $f(x)=f(x+4)$이고 $-12\le x\le12$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 3, -3이므로 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은 0이다. (참)

ㄷ. $-2\le x\le2$일 때, 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근은 적어도 2개 존재한다. $f(x)=f(x+4)$이므로 $-12\le x\le12$에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근은 적어도 12개 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

05 다항함수의 미분법

정답 본문 61~73쪽

01 ⑤	02 ①	03 ⑤	04 ③	05 ④
06 ③	07 ③	08 11	09 ③	10 ③
11 ⑤	12 ②	13 ③	14 ③	15 ④
16 ①	17 ⑤	18 ⑤	19 ③	20 ④
21 ②	22 ④	23 ③	24 ④	25 ⑤
26 ⑤	27 689	28 121	29 ③	30 ①
31 ②	32 2	33 ④	34 ③	35 ⑤
36 ②	37 ⑤	38 ③	39 ①	40 ⑤
41 6				

01

$f'(1)=3$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)-\{f(1-h)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}$

$=2f'(1)+f'(1)$

$=3f'(1)$

$=3\times3=9$

답 ⑤

02

$\lim_{h\to0}\frac{f(4+3h)-5}{h}=2$에서 $h\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

또한 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $x=4$에서 연속이다. 그러므로

$\lim_{h\to0}\{f(4+3h)-5\}=0$에서 $f(4)=5$

따라서

$\lim_{h\to0}\frac{f(4+3h)-5}{h}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(4+3h)-f(4)}{3h}\times3\right\}$

$=3f'(4)=2$

에서 $f'(4)=\frac{2}{3}$이므로

$\lim_{x\to4}\frac{f(x)-5}{x^2-16}=\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x^2-16}$

$=\lim_{x\to4}\left\{\frac{f(x)-f(4)}{x-4}\times\frac{1}{x+4}\right\}$

$=\frac{1}{8}f'(4)=\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$

답 ①

03

함수 $f(x)$가 다항함수이므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이므로 $f(2)=4$

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)g(2+3h)-f(2+h)g'(2)}{h}=6$에서 $h\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

또한 함수 $g(x)$가 다항함수이므로 $x=2$에서 연속이다. 즉,

$\lim_{h\to0}\{f(2+h)g(2+3h)-f(2+h)g'(2)\}$

$=\lim_{h\to0}[f(2+h)\{g(2+3h)-g'(2)\}]$

$=4\lim_{h\to0}\{g(2+3h)-g'(2)\}$

$=4\{\lim_{h\to0}g(2+3h)-\lim_{h\to0}g'(2)\}$

$=4\{g(2)-g'(2)\}$

$=0$

에서 $g(2)=g'(2)$

따라서

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)g(2+3h)-f(2+h)g'(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)\{g(2+3h)-g(2)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}f(2+h)\times\lim_{h\to0}\left\{\frac{g(2+3h)-g(2)}{3h}\times3\right\}$

$=f(2)\times g'(2)\times3$

$=12g'(2)=6$

이므로 $g'(2)=\frac{1}{2}$

답 ⑤

04

$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2(x-2) & (x<2)\\ x^2+ax+b & (x\ge2)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x+2)^2(x-2)=0$

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x^2+ax+b)=4+2a+b$

$f(2)=4+2a+b$

에서 $4+2a+b=0$

즉, $b=-2(a+2)$ …… ㉠

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{(x+2)^2(x-2)-0}{x-2}$

$=\lim_{x\to2-}(x+2)^2=16$

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{x^2+ax+b-0}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}\frac{x^2+ax-2(a+2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}(x+a+2)=a+4$

이므로

$a+4=16$

$a=12$

㉠에서 $b=-28$이므로

$a+b=12+(-28)=-16$

답 ③

05

$$f(x)=\begin{cases} a(1-x)+b & (x<2) \\ x^3+ax & (x\ge 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} \{a(1-x)+b\}=-a+b$

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} (x^3+ax)=8+2a$

$f(2)=8+2a$에서

$-a+b=8+2a$

$b=3a+8$ ...... ㉠

또한 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-} \frac{\{a(1-x)+b\}-(8+2a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-} \frac{\{a(1-x)+3a+8\}-(8+2a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-} \frac{a(2-x)}{x-2}$$
$$=-a$$

$$\lim_{x\to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+} \frac{(x^3+ax)-(8+2a)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+} \frac{(x^3-8)+a(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)+a(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+} (x^2+2x+4+a)=12+a$$

에서 $-a=12+a$

$a=-6$

㉠에서 $b=-10$이므로

$a-b=-6-(-10)=4$

답 ④

06

$$g(x)=\begin{cases} 4 & (x\le 1) \\ f(x) & (1<x\le k) \\ c & (x>k) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, $x=1$, $x=k$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)$, $\lim_{x\to k} g(x)=g(k)$

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(1)=4$, $f(k)=c$

즉, $1+a+b=4$, $k^3+ak^2+bk=c$ ...... ㉠

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$, $x=k$에서도 미분가능하다.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-} \frac{4-4}{x-1}=0$$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-4}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+} \frac{(x^3+ax^2+bx)-(1+a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)\{x^2+(a+1)x+a+b+1\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+} \{x^2+(a+1)x+a+b+1\}$$
$$=\lim_{x\to 1+} \{x^2+(a+1)x+4\}$$
$$=a+6$$

$a+6=0$에서

$a=-6$

㉠에서 $b=9$

즉, $f(x)=x^3-6x^2+9x$이고

$$\lim_{x\to k-} \frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-} \frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k-} \frac{(x^3-6x^2+9x)-(k^3-6k^2+9k)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k-} \frac{(x-k)\{x^2+(k-6)x+k^2-6k+9\}}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k-} \{x^2+(k-6)x+k^2-6k+9\}$$
$$=3k^2-12k+9$$

$$\lim_{x\to k+} \frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+} \frac{c-f(k)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k+} \frac{0}{x-k}$$
$$=0$$

이므로

$3k^2-12k+9=0$에서

$3(k-1)(k-3)=0$

$k>1$이므로 $k=3$

$f(3)=3^3-6\times 3^2+9\times 3=0$

그러므로 $c=0$

따라서 $a-b+c-k=-6-9+0-3=-18$

답 ③

07

$f(x)=(x^3+2x)(x^2-x+1)$에서

$f'(x)=(3x^2+2)(x^2-x+1)+(x^3+2x)(2x-1)$이므로

$f'(1)=5\times 1+3\times 1=8$

답 ③

08

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{2}$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)+3\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(0)+3=0$에서 $f(0)=-3$

즉, $b=-3$

$f(x)=x^3+ax^2+a^2x-3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+ax^2+a^2x}{x(3x^2+2ax+a^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+ax+a^2}{(3x^2+2ax+a^2)^2}$$

이때 $a=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로 $a\neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2}=\frac{a^2}{a^4}=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{2}$$

에서 $a^2=2$

따라서 $a^2+b^2=2+(-3)^2=2+9=11$

답 11

다른 풀이

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{2}$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)+3\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(0)+3=0$에서 $f(0)=-3$

즉, $b=-3$

$f(x)=x^3+ax^2+a^2x-3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\times\frac{1}{(3x^2+2ax+a^2)^2}\right\}$$

이때 $a=0$이면 극한값이 존재하지 않으므로 $a\neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{(3x^2+2ax+a^2)^2}=\frac{f'(0)}{a^4}=\frac{a^2}{a^4}=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{2}$$

에서 $a^2=2$

따라서 $a^2+b^2=2+(-3)^2=2+9=11$

09

조건 (가)에서 $f(1)-g(1)=0$, $f'(1)-g'(1)=0$이므로

삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$은 $x=1$을 중근으로 갖는다.

다른 한 근을 k라 하면

$f(x)-g(x)=(x-1)^2(x-k)$ …… ㉠

조건 (나)에서 $g'(1)=-g'(3)$이므로 이차함수 $g(x)$의 그래프에서 축의 방정식은

$x=\frac{1+3}{2}=2$

그러므로 상수 a, b에 대하여

$g(x)=a(x-2)^2+b=a(x^2-4x+4)+b$

로 놓을 수 있다.

$g'(x)=a(2x-4)$

$g'(1)=-2a=4$

이므로

$a=-2$

$g(x)=-2(x-2)^2+b$

㉠에서

$f(x)=(x-1)^2(x-k)+g(x)$

이므로

$f(x)=(x-1)^2(x-k)-2(x-2)^2+b$

$\quad=(x^2-2x+1)(x-k)-2(x^2-4x+4)+b$

$f'(x)=(2x-2)(x-k)+(x^2-2x+1)-2(2x-4)$

$f'(-1)=4k+20=8$

$k=-3$

$f(x)-g(x)=(x-1)^2(x+3)$

따라서 $f(2)-g(2)=5$

답 ③

참고

① '다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$이면 $f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$로 나타낼 수 있다.'

다항식 $f(x)$를 $(x-\alpha)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+ax+b$이고

$f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+a$

$f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$에서

$a\alpha+b=0$, $a=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=0$이므로

$f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$

로 나타낼 수 있다.

② '이차함수 $g(x)$에 대하여 $g'(\alpha)=-g'(\beta)$이면 이차함수 $g(x)$의 그래프에서 축의 방정식은 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$이다.'

$g(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$g'(x)=2ax+b$

$g'(\alpha)=-g'(\beta)$에서

$g'(\alpha)+g'(\beta)=0$

$2a(\alpha+\beta)+2b=0$

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

한편, 이차함수 $y=g(x)$의 그래프에서 축의 방정식은 $x=-\frac{b}{2a}$로

$x=-\frac{b}{2a}=\frac{\alpha+\beta}{2}$

가 성립한다.

10

$f(x)=x^3+3x-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2+3$

이때 $f'(1)=6$이므로 점 $(1, 3)$을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{6}(x-1)$

이 직선이 점 $(a, 1)$을 지나므로

$1-3=-\frac{1}{6}(a-1)$

$a-1=12$

따라서 $a=13$

답 ③

11

$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)=(x^2-1)(x-a)$에서

$f'(x)=2x(x-a)+x^2-1$

$f'(1)=2(1-a)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1, 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=2(1-a)(x-1)$

이 직선이 점 $(3, f(3))$을 지나므로

$f(3)=2(1-a)\times(3-1)=4(1-a)$

한편, $f(3)=4\times2\times(3-a)=24-8a$이므로

$4(1-a)=24-8a$

$1-a=6-2a$

따라서 $a=5$

답 ⑤

12

$f(x)=x^3+3x-2$에서 $f'(x)=3x^2+3$

$g(x)=x^2+ax+b$에서 $g'(x)=2x+a$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $\mathrm{A}(1, 2)$에서 만나므로 $g(1)=f(1)$에서

$1+a+b=2$

$a+b=1$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(1, 2)$에서의 접선이 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 A에서의 접선과 일치하므로

$g'(1)=f'(1)$에서

$2+a=6$

$a=4$

㉠에서 $b=-3$

따라서 $g(x)=x^2+4x-3$이므로

$g(-1)=1-4-3=-6$

답 ②

13

$f(x)=x^2+2x+2$라 하면 $f'(x)=2x+2$

접점의 좌표를 $\mathrm{A}(\alpha, \alpha^2+2\alpha+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(\alpha)=2\alpha+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(\alpha^2+2\alpha+2)=(2\alpha+2)(x-\alpha)$

$y=2(\alpha+1)x-\alpha^2+2$ …… ㉠

같은 방법으로 점 $\mathrm{B}(\beta, \beta^2+2\beta+2)$에서의 접선의 방정식은

$y=2(\beta+1)x-\beta^2+2$ …… ㉡

두 접선은 모두 점 $\left(a, \frac{1}{2}a\right)$를 지나므로 ㉠, ㉡에서

$\frac{1}{2}a=2(\alpha+1)a-\alpha^2+2$, $\frac{1}{2}a=2(\beta+1)a-\beta^2+2$

즉, α, β는 t에 대한 이차방정식 $\frac{1}{2}a=2(t+1)a-t^2+2$의 근이다.

$t^2-2at-\frac{3}{2}a-2=0$

에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=-\frac{3}{2}a-2$ …… ㉢

이때 직선 AB의 방정식은

$y-(\alpha^2+2\alpha+2)=\frac{(\beta^2+2\beta+2)-(\alpha^2+2\alpha+2)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$

$y-(\alpha^2+2\alpha+2)=\frac{(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$

$y-(\alpha^2+2\alpha+2)=(\beta+\alpha+2)(x-\alpha)$

$y=(\alpha+\beta+2)x-\alpha\beta+2$

㉢에서 $y=(2a+2)x+\frac{3}{2}a+4=a\left(2x+\frac{3}{2}\right)+2x+4$

이므로 직선 AB는 a의 값에 관계없이 항상 점 $\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right)$를 지난다.

따라서 $p=-\frac{3}{4}$, $q=\frac{5}{2}$이므로 $p+q=-\frac{3}{4}+\frac{5}{2}=\frac{7}{4}$

답 ③

14

$f(x)=x^3+3x$에서 $f(0)=0$, $f(3)=36$이므로

직선 AB의 기울기는 $\frac{36-0}{3-0}=12$

$f'(x)=3x^2+3$이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{C}(c, f(c))$ $(0<c<3)$에서의 접선의 기울기가 12이므로

$f'(c)=3c^2+3=12$에서 $c=\sqrt{3}$이고

$f(\sqrt{3})=6\sqrt{3}$

그러므로 접선 l의 방정식은

$y-6\sqrt{3}=12(x-\sqrt{3})$

$y=12x-6\sqrt{3}$

직선 l이 곡선 $y=-x^2+6x+k$와 서로 다른 두 점 D, E에서 만나므로

$-x^2+6x+k=12x-6\sqrt{3}$

$x^2+6x-6\sqrt{3}-k=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=3^2-(-6\sqrt{3}-k)>0$

$k>-9-6\sqrt{3}$ …… ㉡

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=-6\sqrt{3}-k$

직선 AB와 직선 DE가 서로 평행하고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DE}}$이므로

$|\beta-\alpha|=|3-0|=3$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-6)^2-4\times(-6\sqrt{3}-k)=9$

$4k=-27-24\sqrt{3}$

$k=-\frac{27}{4}-6\sqrt{3}$

으로 ㉡의 조건을 만족시킨다.

따라서 $p=-\frac{27}{4}$, $q=-6$이므로

$p-q=-\frac{27}{4}-(-6)=-\frac{3}{4}$

답 ③

15

함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 한다. 삼차함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 증가하거나 감소해야 한다.

즉, '모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$' 또는 '모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$'이어야 한다.

$f(x)=x^3-12x^2+ax+1$에서 $f'(x)=3x^2-24x+a$로 함수 $f'(x)$의 이차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \leq 0$인 경우는 존재하지 않는다.

그러므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2-24x+a \geq 0$이 성립하려면 이차방정식 $3x^2-24x+a=0$의 판별식을 D라 할 때 $D \leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=12^2-3a \leq 0$

$a \geq 48$

따라서 실수 a의 최솟값은 48이다.

답 ④

16

$f(x)=x^3+kx^2+3$에서

$f'(x)=3x^2+2kx=x(3x+2k)$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(1, 4)$에서 감소하려면 $1<x<4$일 때 $f'(x) \leq 0$이 성립해야 한다.

즉, $f'(1) \leq 0$, $f'(4) \leq 0$

$f'(1)=3+2k \leq 0$에서 $k \leq -\frac{3}{2}$

$f'(4)=48+8k \leq 0$에서 $k \leq -6$

두 부등식을 동시에 만족시켜야 하므로

$k \leq -6$

따라서 실수 k의 최댓값은 -6이다.

답 ①

17

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서 $f(0)=f'(1)$이므로

$c=3+2a+b$ …… ㉠

조건 (나)에서 $f'(x)$는 $x=1$일 때 최솟값을 가지므로 함수 $y=3x^2+2ax+b$의 그래프의 축이 직선 $x=1$이다. 즉,

$-\frac{a}{3}=1$에서 $a=-3$ …… ㉡

조건 (다)에서 $(x_1-x_2)\{f(x_1)-f(x_2)\} \leq 0$이므로

$x_1>x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$이고 $x_1<x_2$이면 $f(x_1) \geq f(x_2)$이다.

즉, 열린구간 $(-1, 2)$에서 함수 $f(x)$는 감소해야 한다.

그러므로 열린구간 $(-1, 2)$에서 $f'(x) \leq 0$이 성립해야 한다.

함수 $f'(x)=3x^2+2ax+b$의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이고, 이차항의 계수가 양수이므로, 열린구간 $(-1, 2)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<f'(-1)$이다. $f'(-1) \leq 0$이면 열린구간 $(-1, 2)$에서 항상 $f'(x) \leq 0$이 성립한다.

$f'(-1)=3-2a+b \leq 0$

$b \leq 2a-3$

㉡을 대입하면

$b \leq -9$ …… ㉢

㉠, ㉡에서

$f(x)=x^3-3x^2+bx+b-3$

그러므로

$f(3)=27-27+3b+b-3=4b-3$

이때 ㉢에서 $b \leq -9$이므로

$f(3) \leq -36-3=-39$

따라서 $f(3)$의 최댓값은 -39이다.

답 ⑤

18

$f(x)=x^3+3x^2-9x+a$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)=3(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-3	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f(1)=1+3-9+a=-2$에서

$a=3$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-9x+3$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값 $f(-3)$은

$f(-3)=-27+27+27+3=30$

답 ⑤

19

$f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+a$에서

$f'(x)=4x^3+4x^2-8x=4x(x^2+x-2)$

$=4x(x-1)(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-2	…	0	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=-2$와 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(-2)=a-\frac{32}{3}$, $f(0)=a$, $f(1)=a-\frac{5}{3}$

이고 모든 극값의 합이 $\frac{2}{3}$이므로

$3a-\frac{37}{3}=\frac{2}{3}$

따라서 $a=\frac{13}{3}$

답 ③

20

$f(x)=x^3-ax^2+(a^2-3a)x+1$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+a^2-3a$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $3x^2-2ax+a^2-3a=0$의 판별식을 D라 하면 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-3a)>0$

$-2a^2+9a>0$

$2a\left(a-\frac{9}{2}\right)<0$

$0<a<\frac{9}{2}$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4로 개수는 4이다.

답 ④

21

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)로 놓으면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=-f'(-x)$이므로

$4x^3+3ax^2+2bx+c=-4(-x)^3-3a(-x)^2-2b(-x)-c$

$6ax^2+2c=0$에서 $a=0$, $c=0$이므로

$f(x)=x^4+bx^2+d$

$f'(x)=4x^3+2bx$

조건 (나)에서 $x=2$일 때 극솟값을 가지므로

$f'(2)=0$

$32+4b=0$에서 $b=-8$

$f(x)=x^4-8x^2+d$에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x^2-4)$

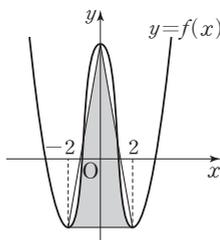
$=4x(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=-2$와 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

y $y=f(x)$ -2 2 O x

[$d>0$, $f(2)<0$인 경우]

이때 $f(0)-f(2)=d-(16-32+d)=16$

이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{2-(-2)\}\times16=32$

답 ②

22

함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x\ge0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같고, $x<0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 $x>0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭인 연속함수이다.

조건 (가)에서 $f(1)=f'(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

$f(x)=(x-1)^2(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-2x+1)(x^2+ax+b)$

$f'(x)=(2x-2)(x^2+ax+b)+(x-1)^2(2x+a)$

$=(x-1)\{4x^2+(3a-2)x+2b-a\}$

조건 (나)에서 함수 $|g(x)-3|$은 $x=k$, $x=-k$에서만 미분가능하지 않으며 $k\neq0$이므로 함수 $|g(x)-3|$은 $x=0$에서 미분가능하다.

함수 $|g(x)-3|$의 그래프도 y축에 대하여 대칭이므로 $x=0$에서 미분가능하려면 $f'(0)=0$이어야 한다.

$f'(0)=-2b+a=0$에서

$a=2b$

그러므로

$f'(x)=(x-1)\{4x^2+(3a-2)x\}$

$=4x(x-1)\left(x-\frac{2-3a}{4}\right)$

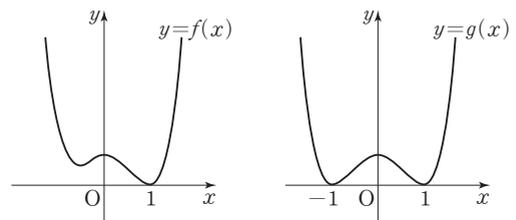
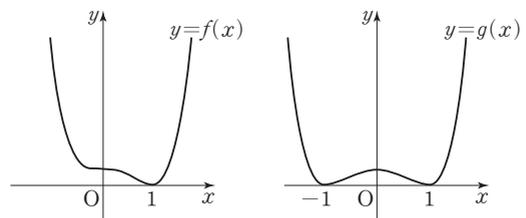
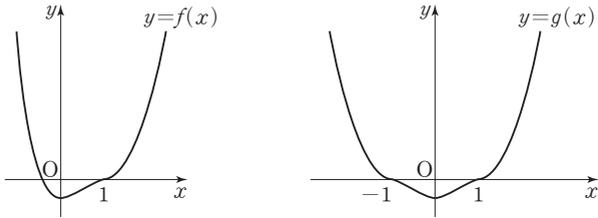
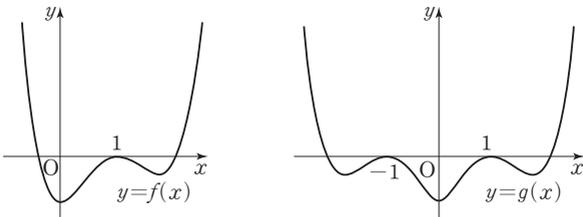
조건 (다)에서 열린구간 $(0, 1)$에 속하는 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)f'(x_2)>0$이므로 함수 $y=f(x)$는 열린구간 $(0, 1)$에서 항상 증가하거나 항상 감소한다. 즉, 극값을 갖지 않는다.

따라서 $\frac{2-3a}{4}\le0$ 또는 $\frac{2-3a}{4}\ge1$

(i) $a>\frac{2}{3}$일 때

y $y=f(x)$ O 1 x y $y=g(x)$ -1 O 1 x

(ii) $a=\frac{2}{3}$일 때

y $y=f(x)$ O 1 x y $y=g(x)$ -1 O 1 x

(iii) $a=-\frac{2}{3}$일 때

(iv) $a<-\frac{2}{3}$일 때

ㄱ. $f(0)>0$이면 (i), (ii)의 경우로 함수 $|g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)

ㄴ. (iii)의 경우 함수 $g(x)$는 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. (i), (ii), (iii), (iv)에서 조건 (나)를 항상 만족시키려면

$f(0)=b\le 3$

따라서 $f(2)=4+2a+b=4+4b+b=5b+4\le 19$로 $f(2)$의 최댓값은 19이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

23

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-20$	↗	a	↘	$a-4$	↗	a

$f(-2)=-8-12+a=a-20$

$f(0)=a$

$f(2)=8-12+a=a-4$

$f(3)=27-27+a=a$

이고 $a-4>a-20$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값 $a-20$을 갖고, $x=0$ 또는 $x=3$일 때 최댓값 a를 갖는다.

따라서 $m=a-20$, $M=a$이므로

$M+m=12$에서

$a+(a-20)=12$

$a=16$

답 ③

24

도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 $x=0$에서 x축에 접하고, $x=3$에서 x축과 만나므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[-4, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-4, 4]$에서 $x=3$일 때 극소이면서 최소이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)$이다.

답 ④

25

$f(x)=ax^3-3ax^2-1$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

a가 양수이므로 닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이다.

$f(2)=8a-12a-1=-4a-1=-5$이므로

$4a=4$, $a=1$

$f(x)=x^3-3x^2-1$

이때 $f(1)=1-3-1=-3$, $f(4)=64-48-1=15$이므로

함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 15를 갖는다.

따라서 $M=15$

답 ⑤

26

$y=8^x-3\times 2^x+5=2^{3x}-3\times 2^x+5$

$2^x=t$로 치환하면 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 $\frac{1}{4}\le t\le 4$

$f(t)=t^3-3t+5$로 놓으면 구하는 값은 닫힌구간 $\left[\frac{1}{4}, 4\right]$에서 함수 $f(t)$의 최댓값과 최솟값의 합이다.

$f'(t)=3t^2-3=3(t^2-1)=3(t+1)(t-1)$

$f'(t)=0$에서 $t=-1$ 또는 $t=1$

닫힌구간 $\left[\frac{1}{4}, 4\right]$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	극소	↗	

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}-\frac{3}{4}+5=\frac{273}{64}$

$f(1)=1-3+5=3$

$f(4)=64-12+5=57$

이므로 함수 $f(t)$는 $t=4$일 때 최댓값 57, $t=1$일 때 최솟값 3을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$57+3=60$

답 ⑤

27

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=-2$에서 x축에 접하고, 두 점 $A(3, 0)$, $B(0, 6)$을 지나므로

$f(x)=a(x+2)^2(x-3)$ (a는 상수)

$f(0)=6$이므로 $a\times4\times(-3)=6$

에서 $a=-\frac{1}{2}$

$f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2(x-3)$

$$S(t)=\frac{1}{2}\times(3-t)\times\left\{-\frac{1}{2}(t+2)^2(t-3)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}(t-3)^2(t+2)^2$$
$$=\frac{1}{4}(t^2-6t+9)(t^2+4t+4)\ (-2<t<3)$$

$$S'(t)=\frac{1}{4}(2t-6)(t+2)^2+\frac{1}{4}(t-3)^2(2t+4)$$
$$=\frac{1}{4}(t-3)(t+2)\{2(t+2)+2(t-3)\}$$
$$=\frac{1}{2}(t-3)(t+2)(2t-1)\ (-2<t<3)$$

$S'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{2}$

$-2<t<3$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(-2)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	극대	↘	

함수 $S(t)$는 $t=\frac{1}{2}$일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}-3\right)^2\times\left(\frac{1}{2}+2\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{25}{4}\times\frac{25}{4}=\frac{625}{64}$$

따라서 $p=64$, $q=625$이므로

$p+q=64+625=689$

답 689

28

$f(x)=2x^3-ax$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고

$f'(x)=6x^2-a$

(ⅰ) $a\le0$이면 $f'(x)\ge0$이므로 함수 $y=f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이고 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 최솟값은 $f(-1)$이다.

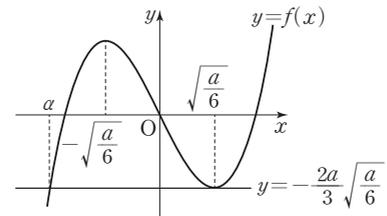
$f(-1)=-2+a=-\frac{32}{27}$

에서 $a=\frac{22}{27}$이므로 $a\le0$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a>0$이면 $f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{\frac{a}{6}}$ 또는 $x=\sqrt{\frac{a}{6}}$이고 극솟값 $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$를 갖는다.

$$f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)=2\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)^3-a\times\sqrt{\frac{a}{6}}$$
$$=\sqrt{\frac{a}{6}}\times\left(\frac{a}{3}-a\right)=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$는 $x=\sqrt{\frac{a}{6}}$에서 접하므로 $f(x)-f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)=2\left(x-\sqrt{\frac{a}{6}}\right)^2(x-\alpha)$ (α는 상수)

y $y=f(x)$ $\sqrt{\frac{a}{6}}$ α $-\sqrt{\frac{a}{6}}$ O x $y=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}$

$$2x^3-ax+\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}=2\left(x-\sqrt{\frac{a}{6}}\right)^2(x-\alpha)$$

에서 양변을 전개하여 이차항의 계수를 비교하면

$\alpha+2\sqrt{\frac{a}{6}}=0$

$\alpha=-2\sqrt{\frac{a}{6}}$

$$2x^3-ax+\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}=2\left(x-\sqrt{\frac{a}{6}}\right)^2\left(x+2\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$$

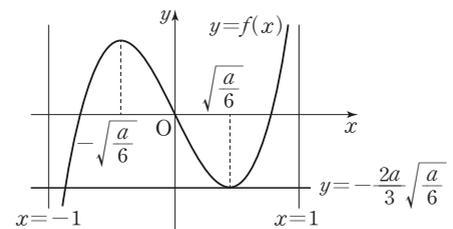
이때 $-2\sqrt{\frac{a}{6}}=-1$인 경우 $a=\frac{3}{2}$

$\sqrt{\frac{a}{6}}=1$인 경우 $a=6$이다.

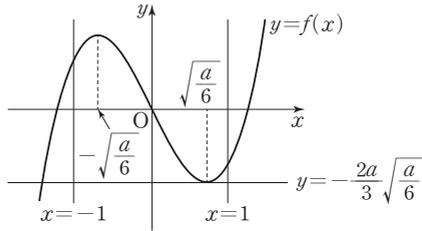
(가) $\sqrt{\frac{a}{6}}<1$, 즉 $0<a<6$인 경우

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 최솟값은 $f(-1)$ 또는 $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$이다.

① $0<a\le\frac{3}{2}$인 경우

y $y=f(x)$ $\sqrt{\frac{a}{6}}$ $-\sqrt{\frac{a}{6}}$ O x $y=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}$ $x=-1$ $x=1$

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 최솟값은 $f(-1)$이다.

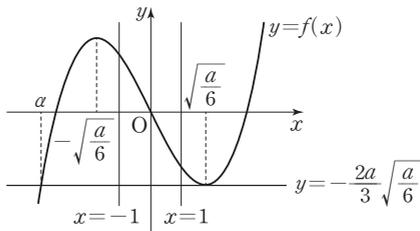
$f(-1)=-2+a=-\frac{32}{27}$에서 $a=\frac{22}{27}$이므로 $0<a\le\frac{3}{2}$을 만족시킨다.

② $\frac{3}{2}<a<6$인 경우

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 최솟값은 $f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right)$이다.

$-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{6}}=-\frac{32}{27}$에서

$a^3=\left(\frac{8}{3}\right)^3$

$a=\frac{8}{3}$이고 $\frac{3}{2}<a<6$을 만족시킨다.

(나) $\sqrt{\frac{a}{6}}\geq 1$, 즉 $a\geq 6$인 경우

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 최솟값은 $f(1)$이다.

$f(1)=2-a=-\frac{32}{27}$

$a=\frac{86}{27}$으로 $a\geq 6$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{22}{27}$ 또는 $a=\frac{8}{3}$

그러므로 모든 실수 a의 값의 합은

$\frac{22}{27}+\frac{8}{3}=\frac{22+72}{27}=\frac{94}{27}$

따라서 $p=27$, $q=94$이므로

$p+q=27+94=121$

답 121

29

$f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-12ax+16a^2$에서

$f'(x)=6x^2+6(a-2)x-12a=6\{x^2+(a-2)x-2a\}$

$=6(x-2)(x+a)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=-a$

ㄱ. $a=1$일 때, $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극대이면서 최대이다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+16$에서 최댓값은

$f(-1)=-2-3+12+16=23$이다.

따라서 $g(1)=23$이다. (참)

ㄴ. (i) $a\leq -2$일 때

함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값을 갖는다.

$f(2)=16+12(a-2)-24a+16a^2$

$=16a^2-12a-8$

이므로

$g(a)=16a^2-12a-8$

(ii) $a>-2$일 때

① $-2<a\leq 2$이면 함수 $f(x)$는 $x=-a$일 때 극대이면서 최대이다.

$f(-a)=-2a^3+3(a-2)a^2+12a^2+16a^2$

$=a^3+22a^2$

이므로

$g(a)=a^3+22a^2$

② $a>2$이면 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값을 갖는다.

$f(-2)=-16+12(a-2)+24a+16a^2$

$=16a^2+36a-40$

이므로

$g(a)=16a^2+36a-40$

(i), (ii)에서

$$g(a)=\begin{cases}16a^2-12a-8 & (a\leq -2)\\ a^3+22a^2 & (-2<a\leq 2)\\ 16a^2+36a-40 & (a>2)\end{cases}$$

함수 $g(a)$는 $a=-2$와 $a=2$에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$\lim_{a\to -2-} g(a)=16\times(-2)^2-12\times(-2)-8=80$

$\lim_{a\to -2+} g(a)=(-2)^3+22\times(-2)^2=80$

$g(-2)=16\times(-2)^2-12\times(-2)-8=80$

으로 $\lim_{a\to -2} g(a)=g(-2)$를 만족시키므로 함수 $g(a)$는 $a=-2$에서 연속이다.

$\lim_{a\to -2-}\frac{g(a)-g(-2)}{a-(-2)}=\lim_{a\to -2-}\frac{(16a^2-12a-8)-80}{a+2}$

$=\lim_{a\to -2-}\frac{4(a+2)(4a-11)}{a+2}$

$=\lim_{a\to -2-}4(4a-11)$

$=-76$

$\lim_{a\to -2+}\frac{g(a)-g(-2)}{a-(-2)}=\lim_{a\to -2+}\frac{(a^3+22a^2)-80}{a+2}$

$=\lim_{a\to -2+}\frac{(a+2)(a^2+20a-40)}{a+2}$

$=\lim_{a\to -2+}(a^2+20a-40)$

$=-76$

에서 $g'(-2)=-76$으로 함수 $g(a)$는 $a=-2$에서 미분가능하다.

$\lim_{a\to 2-} g(a)=2^3+22\times 2^2=96$

$\lim_{a\to 2+} g(a)=16\times 2^2+36\times 2-40=96$

$g(2)=2^3+22\times 2^2=96$

으로 $\lim_{a \to 2} g(a) = g(2)$를 만족시키므로 함수 $g(a)$는 $a=2$에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{a \to 2-} \frac{g(a)-g(2)}{a-2} &= \lim_{a \to 2-} \frac{(a^3+22a^2)-96}{a-2} \\ &= \lim_{a \to 2-} \frac{(a-2)(a^2+24a+48)}{a-2} \\ &= \lim_{a \to 2-} (a^2+24a+48) \\ &= 100\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{a \to 2+} \frac{g(a)-g(2)}{a-2} &= \lim_{a \to 2+} \frac{(16a^2+36a-40)-96}{a-2} \\ &= \lim_{a \to 2+} \frac{4(a-2)(4a+17)}{a-2} \\ &= \lim_{a \to 2+} 4(4a+17) \\ &= 100\end{aligned}$$

에서 $g'(2)=100$으로 함수 $g(a)$는 $a=2$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $g(a)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. $g'(a) = \begin{cases} 32a-12 & (a \le -2) \\ 3a^2+44a & (-2 < a \le 2) \\ 32a+36 & (a > 2) \end{cases}$

$g'(a)=0$에서 $a=0$

함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(a)$	$-$	-76	$-$	0	$+$	100	$+$
$g(a)$	↘		↘	극소	↗		↗

그러므로 함수 $g(a)$는 $a=0$에서 극솟값을 갖고, 극댓값을 갖지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

30

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+a$라 하면

$f'(x)=x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-3)=-9+9+9+a=a+9$

$f(1)=\frac{1}{3}+1-3+a=a-\frac{5}{3}$

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대, $x=1$에서 극소이므로 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-3)>0$, $f(1)<0$

즉, $a+9>0$이고 $a-\frac{5}{3}<0$에서 $-9<a<\frac{5}{3}$

따라서 정수 a의 개수는

$1-(-9)=10$

답 ①

31

삼차방정식 $2x^3-3x^2-12x-k=0$의 서로 다른 실근은 함수 $y=2x^3-3x^2-12x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다.

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$\quad\;\; =6(x-2)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

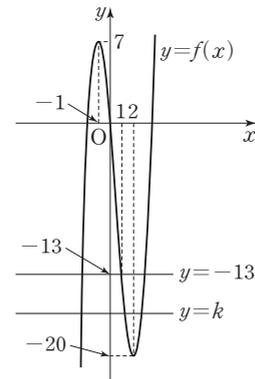
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-1)=-2-3+12=7$

$f(2)=16-12-24=-20$

$f(1)=2-3-12=-13$

방정식 $f(x)=k$가 $\alpha<1<\beta<\gamma$인 세 실근 α, β, γ를 갖기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 그림과 같아야 한다.

따라서 $-20<k<-13$이어야 하므로 정수 k의 개수는

$-13-(-20)-1=6$

답 ②

32

접점의 좌표를 $(a,\ a^3-6a^2+9a-3)$이라 하면

$y'=3x^2-12x+9$에서

접선의 방정식은

$y=(3a^2-12a+9)(x-a)+a^3-6a^2+9a-3$

이 접선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로

$k=(3a^2-12a+9)\times(-a)+a^3-6a^2+9a-3$

$\;\; =-2a^3+6a^2-3$

이때 함수 $f(k)$는 a에 대한 방정식 $-2a^3+6a^2-3=k$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$h(a)=-2a^3+6a^2-3$이라 하면

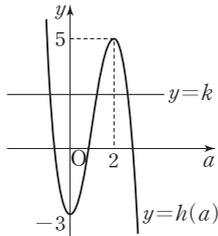
$h'(a)=-6a^2+12a=-6a(a-2)$

$h'(a)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=2$

함수 $h(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(a)$	↘	-3	↗	5	↘

$h(0)=-3$, $h(2)=-16+24-3=5$

함수 $h(a)=-2a^3+6a^2-3$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 $f(k)$이다.

$$f(k)=\begin{cases}1\ (k<-3 \text{ 또는 } k>5)\\ 2\ (k=-3 \text{ 또는 } k=5)\\ 3\ (-3<k<5)\end{cases}$$

그러므로 함수 $f(k)$는 $k=-3$과 $k=5$일 때 불연속이다.

따라서 $p+q=-3+5=2$

답 2

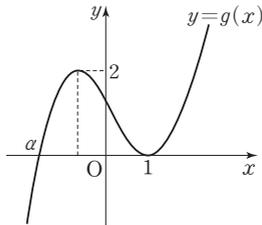
33

조건 (가)에서

$f(x)-(2x+1)=(x-1)^2(x-\alpha)$ (α는 상수) ...... ㉠

조건 (나)에서 방정식 $f(x)-2x=3$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 $f(x)-(2x+1)=2$에서 삼차함수 $y=f(x)-(2x+1)$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

$g(x)=f(x)-(2x+1)$이라 하면 함수 $y=g(x)$는 2를 극값으로 갖는다.

㉠에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=1$에서 x축에 접하므로 극솟값은 $x=1$일 때 0이고, 극댓값이 2, $\alpha<1$이다.

$g(x)=(x-1)^2(x-\alpha)=(x^2-2x+1)(x-\alpha)$

$g'(x)=(2x-2)(x-\alpha)+(x-1)^2=(x-1)(2x-2\alpha+x-1)$

$\qquad=(x-1)(3x-2\alpha-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{2\alpha+1}{3}$

이때 $\dfrac{2\alpha+1}{3}<1$이고, $g\left(\dfrac{2\alpha+1}{3}\right)=2$이다.

$g\left(\dfrac{2\alpha+1}{3}\right)=\left(\dfrac{2\alpha+1}{3}-1\right)^2\left(\dfrac{2\alpha+1}{3}-\alpha\right)$

$\qquad=\left(\dfrac{2\alpha-2}{3}\right)^2\left(\dfrac{-\alpha+1}{3}\right)=2$

$-\dfrac{4}{27}(\alpha-1)^3=2$에서 $(\alpha-1)^3=-\dfrac{27}{2}$

$g(x)=f(x)-(2x+1)$에서

$f(0)=g(0)+1=-\alpha+1$

따라서 $\{f(0)\}^3=(-\alpha+1)^3=-(\alpha-1)^3=\dfrac{27}{2}$

답 ④

34

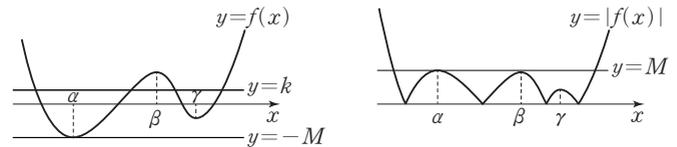
사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고, 극댓값을 가지므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대, $x=\gamma$에서 극소이다.

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$는 서로 다른 세 점에서 만나므로 $-k$는 함수 $f(x)$의 극값이다.

조건 (나)에서 $k>0$이므로 $-k<0$이고, 조건 (다)에서 $M\geq 0$이므로 $-k\neq M$이다. 그러므로 $-k$는 함수 $f(x)$의 두 극솟값 중 큰 값과 같다. 이때 조건 (나)를 만족시키려면 $M>k$이어야 한다.

또한 조건 (다)를 만족시키려면 두 극솟값 중 작은 값은 $-M$이어야 한다.

$f(\alpha)=-M$, $f(\beta)=M$, $f(\gamma)=-k$인 경우 그래프는 그림과 같다.

ㄱ. $M>k>0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$는 서로 다른 4개의 점에서 만난다. 그러므로 방정식 $f(x)-k=0$은 서로 다른 4개의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $-M$은 함수 $f(x)$의 두 극솟값 중 작은 값이므로 방정식 $f(x)=-M$, 즉 $f(x)+M=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. (거짓)

ㄷ. $2M>M>0$이므로 방정식 $|f(x)|=2M$은 서로 다른 2개의 실근을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

35

ㄱ. $f(x)=x^3-3x^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2-6x+a=3(x-1)^2+a-3$

이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖지 않는 경우 함수 $f(x)$는 증가하는 함수로 방정식 $|f(x)-f(1)|=f(7)-f(1)$의 서로 다른 실근의 개수는 2로 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 가지며 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 $x=\alpha$에서 극댓값 $f(\alpha)$, $x=\beta$에서 극솟값 $f(\beta)$를 갖는다. 한편 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $-f(1)$만큼 평행이동한 것이므로 함수 $f(x)$와 마찬가지로 $x=\alpha$에서 극댓값 $g(\alpha)$, $x=\beta$에서 극솟값 $g(\beta)$를 갖는다.

또한 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$이므로 $1-\alpha=\beta-1$이다.

$M=g(\alpha)=f(\alpha)-f(1)$

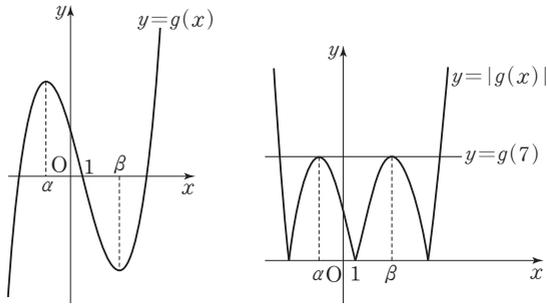
$\quad=(\alpha^3-3\alpha^2+a\alpha)-(1-3+a)$

$\quad=(\alpha^3-1)-3(\alpha^2-1)+a(\alpha-1)$

$\quad=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1-3\alpha-3+a)$

$\quad=(\alpha-1)(\alpha^2-2\alpha-2+a)$

$m=g(\beta)=f(\beta)-f(1)$
$=(\beta-1)(\beta^2-2\beta-2+\alpha)$
$=(\beta-1)\{(\beta-1)^2+\alpha-3\}$
$=(1-\alpha)\{(1-\alpha)^2+\alpha-3\}$
$=-(\alpha-1)(\alpha^2-2\alpha-2+\alpha)$
$m=-M$이므로
$M+m=0$ (참)

ㄴ. $g(1)=0$이고,
ㄱ에서 $|g(\alpha)|=|g(\beta)|$, $1-\alpha=\beta-1$이다.

방정식 $|g(x)|=g(7)$의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로
두 함수 $y=|g(x)|$, $y=g(7)$의 그래프는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 접한다.
함수 $g(x)$의 치역은 실수 전체의 집합이고
$g(k)<0$일 때 $h(k)=0$
$g(k)=0$일 때 $h(k)=3$
$0<g(k)<g(7)$일 때 $h(k)=6$
$g(k)=g(7)$일 때 $h(k)=4$
$g(k)>g(7)$일 때 $h(k)=2$
그러므로 $\{h(k)|k$는 실수$\}=\{0, 2, 3, 4, 6\}$으로 원소의 개수는 5이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=g(7)$은 $x=\alpha$에서 접하고, $x=7$에서 만나므로
$g(x)-g(7)=(x-\alpha)^2(x-7)$
$=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x-7)$
$g'(x)=2(x-\alpha)(x-7)+(x-\alpha)^2$ …… ㉠
$g'(\beta)=2(\beta-\alpha)(\beta-7)+(\beta-\alpha)^2=0$
$(\beta-\alpha)(3\beta-\alpha-14)=0$
$\alpha\neq\beta$이고, $\alpha+\beta=2$이므로
$\alpha-3\beta=-14$
$\alpha-3(2-\alpha)=-14$
$4\alpha=-8$
$\alpha=-2$
이것을 ㉠에 대입하면
$g'(x)=2(x+2)(x-7)+(x+2)^2$
$=3x^2-6x-24$
이므로
$g'(0)=-24$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

36

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+a$라 하면
$f'(x)=6x^2+6x-12$
$=6(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

$f(1)=2+3-12+a=a-7$
$x>0$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 극소이면서 최소이므로 $f(1)>0$이면 조건을 만족시킨다.
즉, $a-7>0$에서 $a>7$
따라서 정수 a의 최솟값은 8이다.

답 ②

37

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$를 만족시키므로
$f(x)-g(x)\geq 0$
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=(x^4-3x^3+a)-(x^3-8x^2+16x+b)$
$=x^4-4x^3+8x^2-16x+a-b$
$h'(x)=4x^3-12x^2+16x-16$
$=4(x-2)(x^2-x+2)$
$h'(x)=0$에서 $x=2$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗

$h(2)=16-32+32-32+a-b$
$=a-b-16$
함수 $h(x)$는 $x=2$일 때 극소이면서 최소이므로 $h(2)\geq 0$이면 조건을 만족시킨다.
즉, $a-b-16\geq 0$
$a-b\geq 16$
따라서 $a-b$의 최솟값은 16이다.

답 ⑤

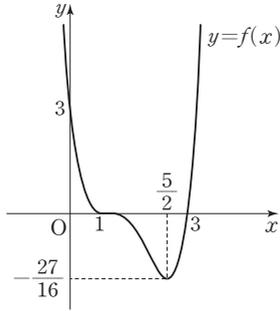
38

$f(x)=(x-1)^3(x-3)=(x^3-3x^2+3x-1)(x-3)$에서
$f'(x)=(3x^2-6x+3)(x-3)+(x-1)^3$
$=3(x-1)^2(x-3)+(x-1)^3$
$=(x-1)^2(3x-9+x-1)$
$=(x-1)^2(4x-10)$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	극소	↗

방정식 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=0$의 서로 다른 실근은 방정식 $g(x)=1$ 또는 $g(x)=3$의 서로 다른 실근이다.

방정식 $(f\circ g)(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(m)$이라 하면

$m<1$일 때 $h(m)=4$

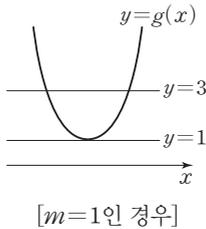
$m=1$일 때 $h(m)=3$

$1<m<3$일 때 $h(m)=2$

$m=3$일 때 $h(m)=1$

$m>3$일 때 $h(m)=0$

이므로 조건 (가)에서 $m=1$

[$m=1$인 경우]

조건 (나)에서 $(f\circ g)(x)\geq(f\circ g)(2)$이고 $g(x)\geq1$

이므로 함수 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$는 $x=2$일 때 최솟값을 갖고,

함수 $y=f(x)$는 $x=\frac{5}{2}$일 때 최솟값을 가지므로

$g(2)=\frac{5}{2}$

$g(2)=(2-k)^2+1=\frac{5}{2}$

$(2-k)^2=\frac{3}{2}$

$2-k=\sqrt{\frac{3}{2}}$ 또는 $2-k=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$k=2-\sqrt{\frac{3}{2}}$ 또는 $k=2+\sqrt{\frac{3}{2}}$

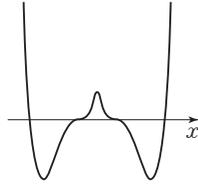
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

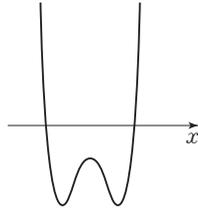
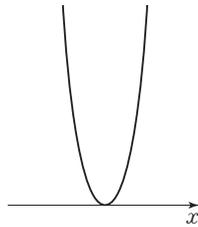
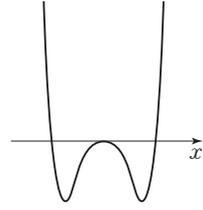
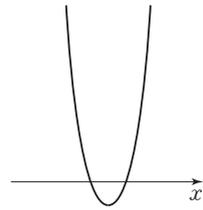
$\left(2-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(2+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

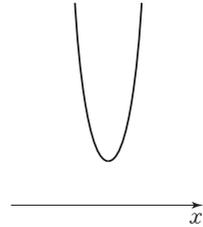
답 ③

참고

함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

$m<1$일 때

$m=1$일 때

$1<m<\frac{5}{2}$일 때

$\frac{5}{2}\leq m<3$일 때

$m=3$일 때

$m>3$일 때

39

$x=t^3-at^2+3$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=3t^2-2at$

시각 $t=1$일 때 점 P의 속도가 2이므로

$3-2a=2$에서 $a=\frac{1}{2}$

$v=3t^2-t$

그러므로 시각 $t=2$에서의 속도는

$12-2=10$

답 ①

40

$x=t^3-4t^2-3t+1$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=3t^2-8t-3$

$3t^2-8t-3=0$에서 $(3t+1)(t-3)=0$

$t\geq0$이므로 $t=3$

$0<t<3$일 때 $v<0$이고, $t>3$일 때 $v>0$이므로

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간은 $t=3$일 때이다.

시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면

$a=6t-8$

따라서 구하는 가속도는

$18-8=10$

답 ⑤

41

두 점 P, Q가 만나는 시각은 $x_1=x_2$에서

$3t^3-3t^2+7t=2t^3+4t^2-3t$

$t^3-7t^2+10t=0$

$t(t-2)(t-5)=0$

$t=0$ 또는 $t=2$ 또는 $t=5$

따라서 두 점 P, Q가 동시에 원점을 출발한 후 처음으로 만나는 순간은 $t=2$일 때이다.

$x_1=3t^3-3t^2+7t$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도를 v_1이라 하면

$v_1=9t^2-6t+7$

$x_2=2t^3+4t^2-3t$이므로 시각 t에서의 점 Q의 속도를 v_2라 하면

$v_2=6t^2+8t-3$

$t=2$일 때의 점 P의 속도는

$36-12+7=31$

$t=2$일 때의 점 Q의 속도는

$24+16-3=37$

따라서 두 점 P, Q의 속도의 차는

$37-31=6$

답 6

06 다항함수의 적분법

정답 본문 76~85쪽

01 ②	02 ③	03 ②	04 ④	05 95
06 32	07 108	08 ③	09 ③	10 ①
11 ①	12 ④	13 ③	14 ②	15 ①
16 ④	17 ④	18 ④	19 ④	20 ②
21 ⑤	22 ③	23 ④	24 6	25 37
26 5	27 ②	28 426	29 ②	30 ③
31 127				

01

$f(x)=\int(x^3+2x^2+1)dx-\int(x^3-x^2)dx$

$=\int\{(x^3+2x^2+1)-(x^3-x^2)\}dx$

$=\int(3x^2+1)dx$

$=x^3+x+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3+x+1$이므로

$f(1)=1+1+1=3$

답 ②

02

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=6+2=8$이므로 접선의 방정식은

$y=8(x-1)+f(1)$

이 직선이 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2=8\times(-1)+f(1)$

$f(1)=6$

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(6x^2+2x)dx$

$=2x^3+x^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=6$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2+3$이므로

$f(2)=16+4+3=23$

답 ③

03

$g(x)=(x^2-4)f(x)$라 하면 곱의 미분법에 의하여

$g'(x)=2xf(x)+(x^2-4)f'(x)$

$\int\{2xf(x)+(x^2-4)f'(x)\}dx$

$=\int g'(x)dx$

$=g(x)+C$

$=(x^2-4)f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

이므로

$(x^2-4)f(x)+C=x^4-2x^3+8x-10$

위의 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$C=6$

$(x^2-4)f(x)=x^4-2x^3+8x-16$

위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$-3f(1)=1-2+8-16$

따라서 $f(1)=3$

답 ②

04

$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx$

$=\int_0^2 (3x^2+12x-4)\,dx$

$=\Big[x^3+6x^2-4x\Big]_0^2$

$=8+24-8$

$=24$

답 ④

05

$-1\le x<0$일 때

$f(x)=(x+1)-2x=-x+1$

$x\ge 0$일 때

$f(x)=(x+1)+2x=3x+1$

이므로

$\int_{-1}^3 xf(x)\,dx=\int_{-1}^0 xf(x)\,dx+\int_0^3 xf(x)\,dx$

$=\int_{-1}^0 x(-x+1)\,dx+\int_0^3 x(3x+1)\,dx$

$=\int_{-1}^0 (-x^2+x)\,dx+\int_0^3 (3x^2+x)\,dx$

$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^0+\Big[x^3+\frac{1}{2}x^2\Big]_0^3$

$=-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(27+\frac{9}{2}\right)$

$=\frac{92}{3}$

따라서 $p=3$, $q=92$이므로

$p+q=3+92=95$

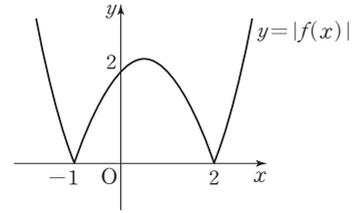
답 95

06

$f(x)=(x+1)(x-2)$에서

$|f(x)|=\begin{cases} x^2-x-2 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x^2+x+2 & (-1<x<2) \end{cases}$

$-1\le a\le 0$이므로 $2\le a+3\le 3$

따라서

$g(a)=\int_a^{a+3} |f(x)|\,dx$

$=\int_a^2 (-x^2+x+2)\,dx+\int_2^{a+3} (x^2-x-2)\,dx$

$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_a^2+\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\Big]_2^{a+3}$

$=\frac{10}{3}+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2-2a+\frac{1}{3}(a+3)^3$

$-\frac{1}{2}(a+3)^2-2(a+3)+\frac{10}{3}$

$=\frac{2}{3}a^3+2a^2+2a+\frac{31}{6}$

$g'(a)=2a^2+4a+2=2(a+1)^2\ge 0$

함수 $g(a)$는 증가하는 함수이므로 $-1\le a\le 0$에서 함수 $g(a)$는 최솟값 $g(-1)$, 최댓값 $g(0)$을 갖는다.

$g(-1)=\frac{9}{2}$, $g(0)=\frac{31}{6}$이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{31}{6}+\frac{9}{2}=\frac{31+27}{6}=\frac{29}{3}$

따라서 $p=3$, $q=29$이므로

$p+q=3+29=32$

답 32

07

$\int_{-3}^3 (4x^3+6x^2+7x)\,dx=2\int_0^3 6x^2\,dx$

$=2\Big[2x^3\Big]_0^3$

$=2(54-0)$

$=108$

답 108

08

조건 (가)에서 $f(x)=ax^3+bx$ (a, b는 상수, $a\ne 0$)

조건 (나)에서 $f(1)=6$이므로

$a+b=6$ …… ㉠

조건 (가), (다)에서

$\int_{-2}^2 f'(x)\,dx=\Big[f(x)\Big]_{-2}^2$

$=f(2)-f(-2)$

$=2f(2)=12$

$f(2)=6$이므로

$8a+2b=6$

$4a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=7$

따라서 $f(x)=-x^3+7x$이므로

$f(3)=-27+21=-6$

답 ③

09

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

조건 (가)에서

$f'(1)=3+2a+b=0$ …… ㉠

조건 (나)에서

$$\int_{-1}^{1} x^2(3x^2+2ax+b)\,dx=\int_{-1}^{1}(3x^4+2ax^3+bx^2)\,dx$$
$$=2\int_0^1(3x^4+bx^2)\,dx$$
$$=2\left[\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{3}bx^3\right]_0^1$$
$$=2\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}b\right)=0$$

에서 $b=-\frac{9}{5}$

이것을 ㉠에 대입하면

$a=-\frac{3}{5}$

$$f'(x)=3x^2-\frac{6}{5}x-\frac{9}{5}$$
$$=\frac{3}{5}(5x^2-2x-3)$$
$$=\frac{3}{5}(x-1)(5x+3)$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-\frac{3}{5}$

따라서 $x=-\frac{3}{5}$일 때 극댓값을 갖는다.

즉, $\alpha=-\frac{3}{5}$이다.

답 ③

다른 풀이

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 3이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$일 때 극대이고 $x=1$일 때 극소이므로

$f'(x)=3(x-1)(x-\alpha)$ $(\alpha<1)$로 놓을 수 있다.

$$\int_{-1}^{1} x^2f'(x)dx=3\int_{-1}^{1} x^2(x-1)(x-\alpha)dx$$
$$=3\int_{-1}^{1}\{x^4-(\alpha+1)x^3+\alpha x^2\}dx$$
$$=6\int_0^1(x^4+\alpha x^2)dx$$
$$=6\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{\alpha}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=6\left(\frac{1}{5}+\frac{\alpha}{3}\right)=0$$

따라서 $\alpha=-\frac{3}{5}$이다.

10

$$f(x)=\int_0^x(3t^2+5t-2)\,dt$$

$f'(x)=3x^2+5x-2=(3x-1)(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 $f(-2)$를 갖는다.

$$f(-2)=\int_0^{-2}(3t^2+5t-2)\,dt$$
$$=\left[t^3+\frac{5}{2}t^2-2t\right]_0^{-2}$$
$$=-8+10+4$$
$$=6$$

답 ①

11

$\int_1^x(t^3-2t)\,dt=2x^3+x-f(x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1(t^3-2t)\,dt=2+1-f(1)$

$0=2+1-f(1)$

이므로 $f(1)=3$

$\int_1^x(t^3-2t)\,dt=2x^3+x-f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$x^3-2x=6x^2+1-f'(x)$

$f'(x)=-x^3+6x^2+2x+1$

에서 $f'(1)=-1+6+2+1=8$

따라서 $f(1)+f'(1)=3+8=11$

답 ①

12

조건 (가)의

$\int_0^x f(t)\,dt=g(x)(x-1)+a(x^2-1)+b$ …… ㉠

에서 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-g(0)-a+b$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_0^1 f(t)\,dt=b$ …… ㉢

조건 (나)에 ㉢을 대입하면 $g(x)=x^2-bx$

$g(0)=0$이므로 ㉡에서

$a=b$ …… ㉣

㉠에 ㉣을 대입하면

$$\int_0^x f(t)\,dt=g(x)(x-1)+a(x^2-1)+a$$
$$=g(x)(x-1)+ax^2$$
$$=(x^2-ax)(x-1)+ax^2$$
$$=x^3-x^2+ax$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=3x^2-2x+a$$
$$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+a-\frac{1}{3}$$

함수 $f(x)$의 최솟값이 1이므로

$$a-\frac{1}{3}=1$$
$$a=\frac{4}{3}$$

따라서 $f(x)=3x^2-2x+\frac{4}{3}$, $g(x)=x^2-\frac{4}{3}x$이므로

$$f(1)+g(-1)=\left(3-2+\frac{4}{3}\right)+\left(1+\frac{4}{3}\right)$$
$$=\frac{14}{3}$$

답 ④

13

$f(t)=3t^2+at-4a$, $F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x(3t^2+at-4a)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$$
$$=F'(0)=f(0)$$
$$=-4a=12$$

에서 $a=-3$

답 ③

14

$\int_{-1}^2 f(t)dt=k$ (k는 상수)라 하면

$$f(x)=4x^3+2x+k$$
$$\int_{-1}^2 f(t)dt=\int_{-1}^2(4t^3+2t+k)\,dt$$
$$=\Big[t^4+t^2+kt\Big]_{-1}^2$$
$$=(16+4+2k)-(1+1-k)$$
$$=18+3k=k$$

에서 $k=-9$

$f(x)=4x^3+2x-9$

$F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$
$$=F'(a)=f(a)$$

$f(a)=4a^3+2a-9=-15$에서

$$4a^3+2a+6=0$$
$$2a^3+a+3=0$$
$$(a+1)(2a^2-2a+3)=0$$

이때 $2a^2-2a+3=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$

따라서 $a=-1$

답 ②

15

$$xf(x)=2x^3-3x^2\int_0^1 f'(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=6x^2-6x\int_0^1 f'(t)\,dt+f(x)$$
$$f'(x)=6x-6\int_0^1 f'(t)\,dt$$

이때 $\int_0^1 f'(t)\,dt=k$ (k는 상수)라 하면

$$f'(x)=6x-6k$$
$$\int_0^1 f'(t)\,dt=\int_0^1(6t-6k)\,dt$$
$$=\Big[3t^2-6kt\Big]_0^1$$
$$=3-6k$$

$3-6k=k$에서 $k=\frac{3}{7}$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=2-3\int_0^1 f'(t)\,dt+\int_1^1 f(t)\,dt$$
$$=2-3\times\frac{3}{7}+0$$
$$=2-\frac{9}{7}=\frac{5}{7}$$

$f'(x)=6x-\frac{18}{7}$에서

$f(x)=\int\left(6x-\frac{18}{7}\right)dx=3x^2-\frac{18}{7}x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=\frac{5}{7}$에서

$$f(1)=3-\frac{18}{7}+C=\frac{5}{7}$$
$$C=\frac{2}{7}$$

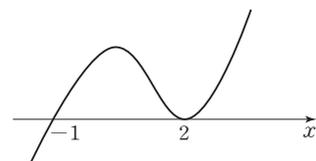
이므로 $f(x)=3x^2-\frac{18}{7}x+\frac{2}{7}$이다.

$F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{-1}^{-1+7h}f(t)dt=\lim_{h\to 0}\frac{F(-1+7h)-F(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{F(-1+7h)-F(-1)}{7h}\times 7\right\}$$
$$=7F'(-1)$$
$$=7f(-1)$$
$$=7\left(3+\frac{18}{7}+\frac{2}{7}\right)$$
$$=41$$

답 ①

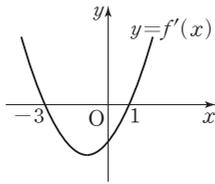
16

함수 $y=(x+1)(x-2)^2$의 그래프는 다음과 같다.

그러므로 곡선 $y=(x+1)(x-2)^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)^2dx=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$$
$$=(4-8+8)-\left(\frac{1}{4}+1-4\right)$$
$$=\frac{27}{4}$$

답 ④

17

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 $x=-3$, $x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(-3)=0$, $f'(1)=0$이다.

$f'(x)=a(x+3)(x-1)$ $(a>0)$이라 하자.
곡선 $y=f'(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$-\int_{-3}^{1}a(x+3)(x-1)\,dx=-a\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)\,dx$$
$$=-a\int_{-3}^{1}(x^2+2x-3)\,dx$$
$$=-a\left[\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right]_{-3}^{1}$$
$$=\frac{32}{3}a=24$$

에서 $a=\frac{9}{4}$

$$f'(x)=\frac{9}{4}(x+3)(x-1)$$
$$=\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{2}x-\frac{27}{4}$$

이므로

$f(x)=\frac{3}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-\frac{27}{4}x+C$ (단, C는 적분상수)

따라서 x의 계수는 $-\frac{27}{4}$이다.

답 ④

18

$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+k$라 하면

$f'(x)=x^3-x=x(x+1)(x-1)=0$에서

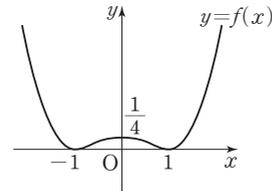
$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{4}+k$	↗	k	↘	$-\frac{1}{4}+k$	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=-1$과 $x=1$에서 극소이므로 곡선 $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+k$가 x축과 서로 다른 두 점에서 접하려면

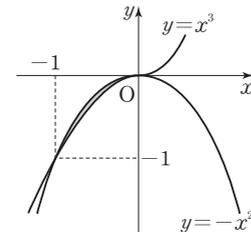
$-\frac{1}{4}+k=0$, 즉 $k=\frac{1}{4}$이어야 한다.

그러므로 $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}$이고 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$2\int_{0}^{1}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\right)dx=2\left[\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{6}+\frac{x}{4}\right]_{0}^{1}$$
$$=2\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{4}{15}$$

답 ④

19

$x^3=-x^2$에서
$x^3+x^2=0$, $x^2(x+1)=0$이므로
$x=-1$ 또는 $x=0$

$-1\le x\le 0$에서 $x^3\ge -x^2$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{0}\{x^3-(-x^2)\}\,dx=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}$$
$$=0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{12}$$

답 ④

20

이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면
$f(x)-3=3(x-1)(x-3)$
따라서 구하는 넓이는

$$-\int_1^3 \{f(x)-3\}\,dx=-\int_1^3 3(x-1)(x-3)\,dx$$
$$=-3\int_1^3 (x^2-4x+3)\,dx$$
$$=-3\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^3$$
$$=-3\left\{(9-18+9)-\left(\frac{1}{3}-2+3\right)\right\}$$
$$=4$$

답 ②

21

$x(x+1)(x-3)=-x(x-3)$에서

$x(x+1)(x-3)+x(x-3)=0$

$x(x-3)(x+2)=0$

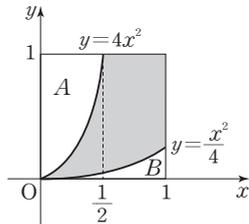
$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^0 x(x-3)(x+2)\,dx+\int_0^3 \{-x(x-3)(x+2)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^0 (x^3-x^2-6x)\,dx+\int_0^3 (-x^3+x^2+6x)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-3x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^3$$
$$=-\left(4+\frac{8}{3}-12\right)+\left(-\frac{81}{4}+9+27\right)$$
$$=\frac{253}{12}$$

답 ⑤

22

그림과 같이 색칠한 부분을 제외한 부분의 넓이를 각각 A, B라 하면

곡선 $y=4x^2$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는

$4x^2=1$에서 $x=\frac{1}{2}$이므로

$$A=\int_0^{\frac{1}{2}} (1-4x^2)\,dx$$
$$=\left[x-\frac{4}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$
$$B=\int_0^1 \frac{x^2}{4}\,dx=\left[\frac{x^3}{12}\right]_0^1=\frac{1}{12}$$

$A+B=\frac{5}{12}$이므로 구하는 넓이는

$$1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

답 ③

다른 풀이

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(4x^2-\frac{x^2}{4}\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx$$
$$=\left[\frac{5}{4}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$=\frac{5}{32}+\left(1-\frac{1}{12}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{96}\right)$$
$$=\frac{7}{12}$$

23

$f(x)=x^3-4x^2+5x$

$f'(x)=3x^2-8x+5=(3x-5)(x-1)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=\frac{5}{3}$에서 극소이다.

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x^3-4x^2+5x=x$에서

$x^3-4x^2+4x=0$, $x(x-2)^2=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

그런데 $f(0)=0$, $f(2)=2$이고 $x=2$에서 중근을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 $x=2$에서 접한다. …… ㉠

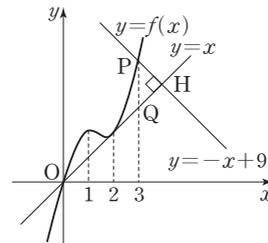
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+9$가 만나는 점을 P라 하면 점 P의 x좌표는

$x^3-4x^2+5x=-x+9$에서

$x^3-4x^2+6x-9=0$

$(x-3)(x^2-x+3)=0$

$x=3$이므로 P(3, 6) …… ㉡

두 직선 $x=3$과 $y=x$가 만나는 점을 Q, 두 직선 $y=x$와 $y=-x+9$가 만나는 점을 H라 하자.

직각삼각형 PQH에서

점 Q(3, 3)과 직선 $y=-x+9$ 사이의 거리는

$$\overline{QH}=\frac{|3+3-9|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

이고 $\overline{PQ}=6-3=3$이므로

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{QH}^2}$

$=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

직각삼각형 PQH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{9}{4}$ …… ㉢

함수 $y=f(x)$의 그래프와 곡선 A로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 곡선 A 및 직선 $y=-x+9$로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$, 직선 $y=-x+9$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

그러므로 ㉠, ㉡, ㉢에서

$S_1=2\int_0^2 (x^3-4x^2+5x-x)\,dx$이고

$S_2=2\int_2^3 (x^3-4x^2+5x-x)\,dx+2\times\frac{9}{4}$이다.

따라서 구하는 넓이는

S_1+S_2

$=2\int_0^2 (x^3-4x^2+5x-x)\,dx+2\int_2^3 (x^3-4x^2+5x-x)\,dx+2\times\frac{9}{4}$

$=2\int_0^3 (x^3-4x^2+5x-x)\,dx+2\times\frac{9}{4}$

$=2\int_0^3 (x^3-4x^2+4x)\,dx+\frac{9}{2}$

$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^3+\frac{9}{2}$

$=2\times\left(\frac{81}{4}-36+18\right)+\frac{9}{2}$

$=9$

답 ④

참고

직각삼각형 PQH에서

$\overline{PQ}=3$, $\angle PQH=\angle HPQ=\frac{\pi}{4}$이므로

$\overline{QH}=\overline{PH}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

따라서 직각삼각형 PQH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{9}{4}$

24

조건 (가)에서 A, B, C의 공차를 d라 하면 $A=B-d$, $C=B+d$로 놓을 수 있다.

$\int_a^c |f(x)|\,dx=A+B+C$

$=(B-d)+B+(B+d)$

$=3B$

$\int_a^c f(x)\,dx=A-B+C$

$=(B-d)-B+(B+d)$

$=B$

조건 (나)에서

$3\int_a^c |f(x)|\,dx-4\int_a^c f(x)\,dx=3\times3B-4\times B$

$=5B=10$

에서 $B=2$

$\int_a^c |f(x)|\,dx=3B=3\times2=6$

답 6

25

조건 (나)에서

$\int_{-1}^a f(x)\,dx=\int_{-1}^a (x+1)(x-1)(x-a)\,dx$

$=\int_{-1}^a (x^3-ax^2-x+a)\,dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{a}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+ax\right]_{-1}^a$

$=\left(\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{3}-\frac{a^2}{2}+a^2\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{3}-\frac{1}{2}-a\right)$

$=-\frac{a^4}{12}+\frac{a^2}{2}+\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

이므로 $a^4-6a^2-8a+24=0$, 즉

$(a-2)^2(a^2+4a+6)=0$, $a=2$

그러므로 $-1\le x\le 2$에서

함수 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-1}^1 (x^3-2x^2-x+2)\,dx-\int_1^2 (x^3-2x^2-x+2)\,dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^1-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2$

$=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-2\right)$

$-\left\{\left(4-\frac{16}{3}-2+4\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2\right)\right\}$

$=\frac{37}{12}$

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+3)$이므로 $-1\le x\le 5$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=2\times\frac{37}{12}=\frac{37}{6}$

따라서 $6S=6\times\frac{37}{6}=37$

답 37

26

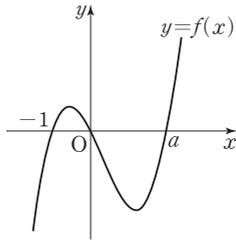
조건 (가)에서 $f'(x)=3x^2+2(1-a)x-a=0$의 서로 다른 두 근의 부호가 다르므로 이차방정식 $3x^2+2(1-a)x-a=0$의 두 근의 곱이 음수이다. 즉,

$-a<0$, $a>0$

곡선 $y=x^3+(1-a)x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3+(1-a)x^2-ax=0$에서

$x(x+1)(x-a)=0$

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=a$

조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분 중에서 x축보다 위쪽에 있는 부분의 넓이가 $\frac{11}{12}$이므로

$$\int_{-1}^{0}\{x^3+(1-a)x^2-ax\}\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1-a}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1-a}{3}+\frac{a}{2}$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{a}{6}=\frac{11}{12}$$

따라서 $a=5$

답 5

27

$f(x)=x^3-6x^2+32$에서

$f'(x)=3x^2-12x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 27)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-12=-9$

이므로 접선의 방정식은 $y-27=-9(x-1)$

$y=-9x+36$

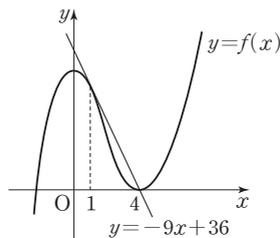
한편, 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+32$의 그래프와 접선이 만나는 점의 x좌표는

$x^3-6x^2+32=-9x+36$에서

$x^3-6x^2+9x-4=0$

$(x-1)^2(x-4)=0$

$x=1$ 또는 $x=4$

그러므로 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+32$의 그래프와 접선은 그림과 같다.

이때 곡선 $y=f(x)$와 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{1}^{4}\{-9x+36-(x^3-6x^2+32)\}\,dx$$

$$=\int_{1}^{4}(-x^3+6x^2-9x+4)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-\frac{9}{2}x^2+4x\right]_{1}^{4}$$

$$=\left(-64+128-72+16\right)-\left(-\frac{1}{4}+2-\frac{9}{2}+4\right)$$

$$=\frac{27}{4}$$

답 ②

28

두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=2x^2-8x+3$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표는 $x^2-2x=2x^2-8x+3$에서

$x^2-6x+3=0$의 두 근이다. 두 근이 α, β $(\alpha<\beta)$이므로

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=3$

$0<\alpha<\beta$ …… ㉠

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=6^2-2\times3=30$

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=6^2-4\times3=24$에서

$\alpha<\beta$이므로 $\beta-\alpha=2\sqrt{6}$

$f(x)=4x^3+3x^2$이라 하면

$f'(x)=12x^2+6x$

$x>0$일 때 $f'(x)>0$이고 $f(0)=0$이므로

$f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서 곡선 $y=4x^3+3x^2$과 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{\alpha}^{\beta}(4x^3+3x^2)\,dx$$

$$=\left[x^4+x^3\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=(\beta^4+\beta^3)-(\alpha^4+\alpha^3)$$

$$=(\beta^4-\alpha^4)+(\beta^3-\alpha^3)$$

$$=(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)(\beta^2+\alpha^2)+(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)$$

$$=(\beta-\alpha)\{(\beta+\alpha)(\beta^2+\alpha^2)+(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)\}$$

$$=2\sqrt{6}(6\times30+30+3)$$

$$=426\sqrt{6}$$

따라서 $m=426$

답 426

29

$t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는 $t=1$에서 $t=5$까지 속도 $v(t)$의 그래프와 t축 및 두 직선 $t=1$, $t=5$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$$1\times3+\frac{1}{2}\times2\times3+\frac{1}{2}\times1\times2=7$$

답 ②

30

원점을 동시에 출발한 두 점 P, Q가 $t=a$ $(a>0)$일 때 만난다고 하면

$\int_{0}^{a}v_1(t)\,dt=\int_{0}^{a}v_2(t)\,dt$에서

$$\int_{0}^{a}(t^2-2t+9)\,dt=\int_{0}^{a}\left(2t+\frac{19}{3}\right)dt$$

$\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+9t\right]_0^a=\left[t^2+\frac{19}{3}t\right]_0^a$

$\frac{1}{3}a^3-a^2+9a=a^2+\frac{19}{3}a$

$\frac{1}{3}a^3-2a^2+\frac{8}{3}a=0$

$\frac{1}{3}a(a^2-6a+8)=0$

$\frac{1}{3}a(a-2)(a-4)=0$

$a>0$이므로 $a=2$ 또는 $a=4$

따라서 점 Q가 움직인 거리는

$\int_2^4\left|2t+\frac{19}{3}\right|dt=\int_2^4\left(2t+\frac{19}{3}\right)dt$

$=\left[t^2+\frac{19}{3}t\right]_2^4$

$=\left(16+\frac{76}{3}\right)-\left(4+\frac{38}{3}\right)$

$=\frac{74}{3}$

답 ③

31

시각 t $(t\geq 0)$에서의 두 점 A, B의 위치를 각각 $s_1(t)$, $s_2(t)$라 하면

$s_1(t)=\int_0^t t(2-t)(4-t)\,dt$

$=\int_0^t (t^3-6t^2+8t)\,dt$

$=\frac{t^4}{4}-2t^3+4t^2$

$s_2(t)=\int_0^t (a-2t)\,dt=-t^2+at$

$s_1(t)=s_2(t)$에서

$\frac{t^4}{4}-2t^3+4t^2=-t^2+at$

$\frac{t^4}{4}-2t^3+5t^2=at$

출발 후 두 점 A, B가 만나는 횟수는 $t>0$일 때,

방정식 $\frac{t^3}{4}-2t^2+5t=a$의 실근의 개수와 같으며 이는

함수 $f(t)=\frac{t^3}{4}-2t^2+5t$ $(t\geq 0)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.

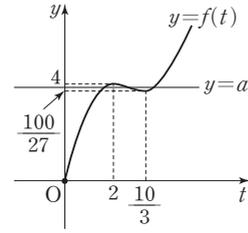
$f(t)=\frac{t^3}{4}-2t^2+5t$에서

$f'(t)=\frac{3}{4}t^2-4t+5$

$f'(t)=0$에서

$\frac{3}{4}t^2-4t+5=0$, $\frac{1}{4}(t-2)(3t-10)=0$

$t=2$ 또는 $t=\frac{10}{3}$

$f(2)=4$, $f\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{100}{27}$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 모든 a의 값의 범위는

$\frac{100}{27}<a<4$

따라서 $p=27$, $q=100$이므로

$p+q=127$

답 127

07 경우의 수

정답 본문 88~98쪽

01 12	02 ③	03 ①	04 ⑤	05 72
06 ⑤	07 ①	08 ⑤	09 ④	10 ③
11 20	12 ②	13 ②	14 ①	15 ②
16 60	17 20	18 ①	19 ⑤	20 186
21 ③	22 10	23 ①	24 ②	25 186
26 ③	27 ⑤	28 ②	29 30	30 ③
31 14	32 ③	33 45	34 ②	

01

먼저 서로 다른 3가지의 초콜릿을 놓는 위치를 정하고 그 사이사이에 서로 다른 3가지의 과일을 놓는다.

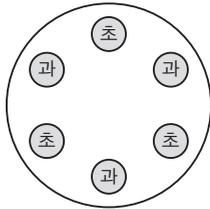
서로 다른 3가지의 초콜릿을 놓는 위치를 정하는 경우의 수는

$(3-1)!=2$

이때 초콜릿 사이사이에 서로 다른 3가지의 과일을 놓는 위치를 정하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times6=12$

답 12

02

남학생 2명과 여학생 3명이 모두 원형 탁자에 놓인 5개의 의자에 앉는 경우의 수는

$(5-1)!=24$

남학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 4명의 학생이 원형 탁자에 놓인 의자에 앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이때 남학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

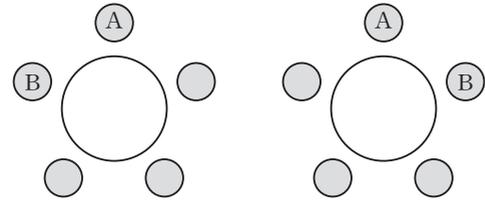
$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$24-6\times2=12$

답 ③

참고

남학생 2명이 이웃하여 앉는 경우의 수는 다음과 같이 구할 수도 있다.
남학생 2명을 A, B라 할 때, A 학생의 자리를 먼저 한 의자에 고정시키면 B 학생의 자리는 다음 그림과 같이 A 학생의 오른쪽 또는 왼쪽의 2가지이다.

이때 나머지 3명의 여학생의 자리를 정하는 경우의 수는 각각

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times6=12$

03

정오각형에 내접하는 원의 내부에 색을 칠하는 경우의 수는

${}_6C_1=6$

남은 5가지의 색을 원의 내부를 제외한 5개 영역에 칠하는 경우의 수는

$(5-1)!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$

답 ①

04

파란색을 한 직각이등변삼각형에 칠하면 빨간색은 맞은편 직각이등변삼각형에 칠하는 것이 결정되므로 파란색과 빨간색을 한 가지 색으로 생각하여 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 원형으로 배열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$(7-1)!=720$

답 ⑤

다른 풀이

파란색을 한 직각이등변삼각형에 칠하면 빨간색은 맞은편 직각이등변삼각형에 칠해져야 한다.

이때 남은 6개의 직각이등변삼각형에는 남은 6가지 색을 칠하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$6!=720$

05

(i) x가 2, 4일 때

조건 (가)에 의하여 $f(x)$의 값은 2, 3, 5 중 하나이므로 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

따라서 ${}_3\Pi_2=3^2=9$

(ii) x가 1, 3, 5일 때

조건 (나)에 의하여 $f(x)$의 값은 2, 4 중 하나이므로 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

따라서 ${}_2\Pi_3=2^3=8$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$9\times8=72$

답 72

06

서로 다른 종류의 연필 6자루 중에서 학생 A에게는 2자루, 학생 B에게는 1자루씩만 나누어 주는 경우의 수는

${}_6C_2 \times {}_4C_1 = 60$

이 각각에 대하여 나머지 연필 3자루를 C, D에게 나누어 주되 연필을 한 자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있으므로 이 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

즉, 이때의 경우의 수는

${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$

따라서 구하는 경우의 수는

$60 \times 8 = 480$

답 ⑤

07

천의 자리	백의 자리	십의 자리	일의 자리

짝수인 자연수는 일의 자리 숫자가 2 또는 4이므로 2가지이고, 그 각각에 대하여 일의 자리를 제외한 각 자리의 숫자는 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 네 자리의 짝수인 자연수의 개수는

$2 \times {}_4\Pi_3 = 128$

이 중에서 1이 이웃하여 나타나는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 두 개일 때

1 1 □ 2 ⇨ 3가지

□ 1 1 2 ⇨ 3가지

1 1 □ 4 ⇨ 3가지

□ 1 1 4 ⇨ 3가지

(ⅱ) 세 개일 때

1 1 1 2, 1 1 1 4 ⇨ 2가지

따라서 각 자리에 숫자 1이 이웃하여 나타나지 않는 짝수인 자연수의 개수는

$128 - (3+3+3+3+2) = 114$

답 ①

08

3 이상의 4개의 숫자 3, 4, 5, 6을 홀수 번째 4개의 자리에 나열하는 경우의 수는

$4! = 24$

이 각각에 대하여 4개의 숫자 1, 1, 2, 2를 짝수 번째 자리에 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24 \times 6 = 144$

답 ⑤

09

2개의 문자 o와 3개의 문자 e를 한 문자 A로 생각하여 6개의 문자 A, b, k, k, p, r를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!} = 360$

이 각각에 대하여 5개의 문자 o, o, e, e, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$

따라서 구하는 경우의 수는

$360 \times 10 = 3600$

답 ④

10

그림과 같이 양 끝에 모두 a가 아닌 문자이려면 ■에 b 또는 c를 먼저 나열한다.

■∨□∨□∨□∨□∨■

또한 a끼리는 서로 이웃하지도 않도록 나열하려면 우선 □에는 2개의 문자 a를 제외한 나머지 4개의 문자를 나열한 다음 그 각각에 대하여 ∨ 표시된 다섯 곳 중 두 곳을 택하여 a를 끼워 넣으면 되므로 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) b∨□∨□∨□∨□∨b일 때

$\frac{4!}{3!} \times {}_5C_2 = 40$

(ⅱ) c∨□∨□∨□∨□∨c일 때

$\frac{4!}{3!} \times {}_5C_2 = 40$

(ⅲ) b∨□∨□∨□∨□∨c일 때

$\frac{4!}{2! \times 2!} \times {}_5C_2 = 60$

(ⅳ) c∨□∨□∨□∨□∨b일 때

$\frac{4!}{2! \times 2!} \times {}_5C_2 = 60$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$40+40+60+60=200$

답 ③

다른 풀이

그림과 같이 □에 6개의 문자 b, b, b, c, c, c를 먼저 나열하는 경우의 수는

□∨□∨□∨□∨□∨□

$\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$

이 각각에 대하여 ∨ 표시된 다섯 곳 중 두 곳을 택하여 a를 끼워 넣는 경우의 수는

${}_5C_2 = 10$

따라서 구하는 경우의 수는

$20 \times 10 = 200$

11

$4 \le f(1)+f(2)+f(3)+f(4) \le 20$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 17f(5)$에서

$f(5)=1$, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=17$

이때 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값에 따라 함수 f의 개수는 다음과 같다.

(ⅰ) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$가 네 수 2, 5, 5, 5를 하나씩 가질 때, 함수 f의 개수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ⅱ) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$가 네 수 3, 4, 5, 5를 하나씩 가질 때, 함수 f의 개수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ⅲ) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$가 네 수 4, 4, 4, 5를 하나씩 가질 때, 함수 f의 개수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$4+12+4=20$

답 20

12

크기가 서로 다른 검은 공 4개를 같은 종류의 검은 공 4개로 생각하여 같은 종류의 흰 공 3개와 함께 일렬로 나열한 다음 검은 공은 큰 것부터 작은 것 순서로 바꾸어 놓으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!\times3!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2}=35$

답 ②

13

야구공, 테니스공, 탁구공을 각각 문자 a, b, c라 하자.

7개의 공 중에서 5개의 공을 택하여 5명의 학생에게 각각 1개씩 공을 나누어 주는 경우의 수는 7개의 문자 a, a, b, b, c, c, c 중에서 문자 5개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

7개의 문자 a, a, b, b, c, c, c 중에서 문자 5개를 택하는 경우는

$aabbc$, $aabcc$, $abbcc$, $aaccc$, $bbccc$, $abccc$

로 6가지이다.

이들에 대하여 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 각각

$\frac{5!}{2!\times2!}$, $\frac{5!}{2!\times2!}$, $\frac{5!}{2!\times2!}$, $\frac{5!}{2!\times3!}$, $\frac{5!}{2!\times3!}$, $\frac{5!}{3!}$

이므로 구하는 경우의 수는

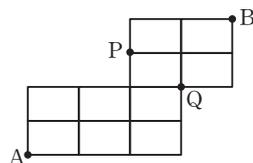
$30+30+30+10+10+20=130$

답 ②

14

오른쪽으로 한 칸 이동하는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 이동하는 것을 b라 하자.

A지점에서 B지점까지 최단거리로 이동하려면 오른쪽 그림의 P지점, Q지점 중 오직 한 지점만을 반드시 지난다.

B
P
Q
A

(ⅰ) P지점을 지날 때의 경우의 수

A지점에서 P지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 4개의 문자 a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같고, P지점에서 B지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 3개의 문자 a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{3!}{2!}=6\times3=18$

(ⅱ) Q지점을 지날 때의 경우의 수

A지점에서 Q지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 5개의 문자 a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같고, Q지점에서 B지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 3개의 문자 a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!\times2!}\times\frac{3!}{2!}=10\times3=30$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$18+30=48$

답 ①

15

↗ 방향으로 한 칸 이동하는 것을 a, ↘ 방향으로 한 칸 이동하는 것을 b라 하자.

(ⅰ) 구간 PQ를 거쳐서 이동하는 경우

A지점에서 P지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 3개의 문자 a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같고, Q지점에서 B지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 4개의 문자 a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=18$

(ⅱ) 구간 QR를 거쳐서 이동하는 경우

A지점에서 Q지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 4개의 문자 a, a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같고, R지점에서 B지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 3개의 문자 a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{3!}{2!}=18$

(ⅲ) 구간 PQ와 구간 QR를 모두 거쳐서 이동하는 경우

A지점에서 P지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 3개의 문자 a, a, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같고, R지점에서 B지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 3개의 문자 a, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=9$

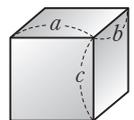
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$18+18-9=27$

답 ②

16

그림과 같이 작은 정육면체에서 가로로 한 칸 이동하는 것을 a, 세로로 한 칸 이동하는 것을 b, 높이로 한 칸 이동하는 것을 c라 하자.

a
b
c

A지점에서 P지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 5개의 문자 a, a, a, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같고, P지점에서 B지점까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 4개의 문자 b, b, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=10\times6=60$

답 60

17

(ⅰ) 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 경우의 수는

$_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

(ⅱ) 숫자 4가 0개인 경우

숫자 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 경우의 수는

$_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

(ⅲ) 숫자 4가 1개인 경우

숫자 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 경우의 수는

$_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$56-(21+15)=20$

답 20

다른 풀이

숫자 4를 먼저 2개 택하여 놓는다고 생각하면 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 경우의 수를 구하면 되므로

$_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

18

연필 4자루를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

볼펜 3자루를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

사인펜 1자루를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 3

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times10\times3=450$

답 ①

19

서로 다른 종류의 셔츠 4벌을 같은 종류의 3개의 옷장에 1벌 이상씩 넣으려면 1개의 옷장에는 반드시 2벌의 셔츠를 넣고 남은 2개의 옷장에는 남은 2벌의 셔츠를 각각 하나씩 넣으면 되므로 경우의 수는

$_4C_2=6$

셔츠를 넣은 다음부터는 3개의 옷장은 서로 구별이 되므로 옷장을 A, B, C라 하자.

각 옷장에 바지를 1벌 이상씩 넣어야 하므로 3개의 바지를 옷장 A, B, C에 각각 하나씩 먼저 넣는다.

남은 4벌의 바지를 옷장 A, B, C에 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times15=90$

답 ⑤

20

(ⅰ) $w=0$일 때, $x+y+z=11$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$_3H_{11}={}_{3+11-1}C_{11}={}_{13}C_{11}={}_{13}C_2=78$

(ⅱ) $w=1$일 때, $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$

(ⅲ) $w=2$일 때, $x+y+z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

(ⅳ) $w=3$일 때, $x+y+z=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

따라서 구하는 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$78+66+36+6=186$

답 186

21

(ⅰ) $d=1$일 때

$a+b+c+5\times1=13$에서

$a+b+c=8$

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$ (a', b', c'은 음이 아닌 정수)

로 놓으면 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 방정식 $a'+b'+c'=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 순서쌍 (a', b', c')의 개수와 같으므로

$_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

(ⅱ) $d=2$일 때

$a+b+c+5\times2=13$에서

$a+b+c=3$

이것을 만족시키는 양의 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $(1, 1, 1)$의 1이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$21+1=22$

답 ③

참고

$d=1$일 때, $a+b+c+5\times1=13$에서

$a+b+c=8$

이때 방정식 $a+b+c=8$의 양의 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 8을 8개의 1의 +로 나타낸 후에 7개의 + 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같다.

↓ ↓

예를 들어 1+1+1+1+1+1+1+1은

$a=3$, $b=1$, $c=4$인 양의 정수의 순서쌍 $(3, 1, 4)$를 나타낸 것이다.

따라서 구하는 양의 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$_7C_2=21$

22

조건 (가)에서 네 자리 자연수를

$a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$ (a, b, c, d는 한 자리 자연수)

로 나타내고 다음과 같이 나누어 생각한다.

(ⅰ) $a=5$인 경우

조건 (나)에서 $5+b+c+d=10$

$b+c+d=5$ ...... ㉠

이때 $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$ (b', c', d'은 음이 아닌 정수)라 하면 ㉠에서

$(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=5$

$b'+c'+d'=2$

이것을 만족시키는 순서쌍 (b', c', d')의 개수는

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

(ii) $a=6$인 경우

조건 (나)에서 $6+b+c+d=10$

$b+c+d=4$ ······ ㉡

이때 $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$ (b', c', d'은 음이 아닌 정수)라 하면 ㉡에서

$(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)=4$

$b'+c'+d'=1$

이것을 만족시키는 순서쌍 (b', c', d')의 개수는

$(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$의 3이다.

(iii) $a=7$인 경우

조건 (나)에서 $7+b+c+d=10$

$b+c+d=3$

이것을 만족시키는 순서쌍 (b, c, d)의 개수는 $(1, 1, 1)$의 1이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+3+1=10$

답 10

23

3권의 같은 종류의 책 A가 일렬로 나열되어 있다고 하자.

□ A □ A □ A □

3권의 같은 종류의 책 A에 대하여 맨 앞과 맨 뒤, 그리고 사이사이의 □로 나타내어진 4곳에 꽂을 책 B의 권 수를 차례로 a, b, c, d라 하면 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는 방정식

$a+b+c+d=9$ ($a\ge2$, $b\ge1$, $c\ge1$, $d\ge2$인 자연수)

를 만족시키는 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같다.

이때 $a=a'+2$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+2$로 놓으면

$a'+b'+c'+d'=3$ (단, a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)

이것을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는 20이다.

답 ①

다른 풀이

그림과 같이 □에 9권의 같은 종류의 책 B를 나열한 다음

□□∨□∨□∨□∨□∨□∨□□

∨ 표시된 여섯 곳 중 세 곳을 택하여 같은 종류의 책 A를 끼워 넣으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

24

조건 (가)에서 A 상자에 넣는 구슬의 개수를 a라 하자.

(i) $a=1$일 때

두 개의 상자 B, C에 미리 1개씩 구슬을 넣고, 나머지 7개의 구슬을 세 개의 상자 B, C, D에 나누어 넣는 구슬의 개수를 각각 b_1, c_1, d_1이라 하면

$b_1+c_1+d_1=7$ (b_1, c_1, d_1은 음이 아닌 정수)

이 방정식을 만족시키는 순서쌍 (b_1, c_1, d_1)의 개수는

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7=36$

(ii) $a=3$일 때

두 개의 상자 B, C에 미리 1개씩 구슬을 넣고, 나머지 5개의 구슬을 세 개의 상자 B, C, D에 나누어 넣는 구슬의 개수를 각각 b_2, c_2, d_2라 하면

$b_2+c_2+d_2=5$ (b_2, c_2, d_2는 음이 아닌 정수)

이 방정식을 만족시키는 순서쌍 (b_2, c_2, d_2)의 개수는

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5=21$

(iii) $a=5$일 때

두 개의 상자 B, C에 미리 1개씩 구슬을 넣고, 나머지 3개의 구슬을 세 개의 상자 B, C, D에 나누어 넣는 구슬의 개수를 각각 b_3, c_3, d_3이라 하면

$b_3+c_3+d_3=3$ (b_3, c_3, d_3은 음이 아닌 정수)

이 방정식을 만족시키는 순서쌍 (b_3, c_3, d_3)의 개수는

${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

(iv) $a=7$일 때

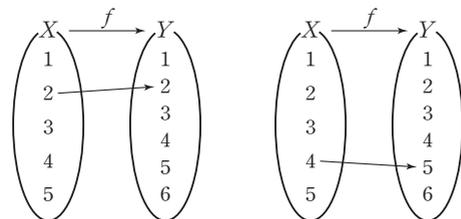
두 개의 상자 B, C에 미리 1개씩 구슬을 넣고, 나머지 1개의 구슬을 세 개의 상자 B, C, D 중 한 상자에 넣으면 되므로 순서쌍의 개수는 3이다.

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$36+21+10+3=70$

답 ②

25

조건 (가)에서 $f(2)=2$, $f(4)=5$이므로 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+1$을 만족시키는 X의 원소는 2 또는 4이므로 다음의 2가지 경우가 있다.

(i) $f(2)=2$, $f(4)\ne5$인 경우

조건 (나)에서 $f(1)<f(2)$를 만족시키려면 $f(2)=2$이므로 X의 원소 1은 반드시 Y의 원소 1에 대응시켜야 하므로 경우의 수는 1이다.

또 조건 (나)에서 $f(3)\le f(4)\le f(5)$를 만족시키려면 X의 원소 3, 4, 5를 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 하나씩 대응시키면 되므로 경우의 수는 ${}_6H_3$이다.

이들 경우의 수 중에서 $f(4)=5$를 만족시키는 경우의 수는 제외하여야 한다.

즉, $f(4)=5$일 때, X의 원소 3과 5를 Y의 원소에 대응시키는 경

우의 수는 각각 5, 2이다.

그러므로 $f(2)=2$, $f(4)\neq5$인 경우의 수는

$1\times({}_6H_3-5\times2)=1\times(56-10)=46$

(ii) $f(2)\neq2$, $f(4)=5$인 경우

조건 (나)에서 $f(1)<f(2)$를 만족시키려면 X의 원소 1, 2를 Y의 원소 중에서 서로 다른 두 개를 택하여 $f(1)<f(2)$가 되도록 대응시키면 되므로 경우의 수는 ${}_6C_2$이다.

이들 경우의 수 중에서 $f(2)=2$를 만족시키는 경우의 수는 제외하여야 한다.

즉, $f(2)=2$일 때, X의 원소 1을 Y의 원소에 대응시키는 경우의 수는 1이다.

또 조건 (나)에서 $f(3)\le f(4)\le f(5)$를 만족시키려면 $f(4)=5$이어야 한다.

즉, $f(4)=5$일 때, X의 원소 3과 5를 Y의 원소에 대응시키는 경우의 수는 각각 5, 2이다.

그러므로 $f(2)\neq2$, $f(4)=5$인 경우의 수는

$({}_6C_2-1)\times(5\times2)=14\times10=140$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$46+140=186$

답 186

26

$\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_r(x^2)^{5-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_5C_r(-2)^rx^{10-3r}$ $(r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

이때 x의 항은 $10-3r=1$일 때이므로

$r=3$

따라서 구하는 x의 계수는

${}_5C_3(-2)^3=-80$

답 ③

27

다항식 $(3x+2y)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_r(3x)^{6-r}(2y)^r={}_6C_r3^{6-r}2^rx^{6-r}y^r$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 6)$

따라서 xy^5항은 $r=5$일 때이므로 xy^5의 계수는

${}_6C_5\times3\times2^5=576$

답 ⑤

28

다항식 $(x+a)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_rx^{5-r}a^r$ $(r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

이때 x^2의 계수는 $r=3$일 때이고 x^2의 계수가 80이므로

${}_5C_3\times a^3=80$, $a^3=8$에서

$a=2$

답 ②

29

다항식 $(2x+a)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_r(2x)^{5-r}a^r={}_5C_r2^{5-r}a^rx^{5-r}$ $(r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

이때 x^2의 계수는 $r=3$일 때이므로

${}_5C_3\times2^2\times a^3=40a^3$

또 x^4의 계수는 $r=1$일 때이므로

${}_5C_1\times2^4\times a=80a$

x^2의 계수가 x^4의 계수의 $\frac{1}{4}$배이므로

$40a^3=\frac{1}{4}\times80a$, $a(2a^2-1)=0$

$a\neq0$이므로 $a^2=\frac{1}{2}$

따라서 $60a^2=60\times\frac{1}{2}=30$

답 30

30

$(1+ax)+(1+ax)^2+(1+ax)^3+\cdots+(1+ax)^8$

$=\frac{(1+ax)\{(1+ax)^8-1\}}{(1+ax)-1}$

$=\frac{(1+ax)^9-(1+ax)}{ax}$

에서 x^2의 계수는 분자의 $(1+ax)^9$의 전개식에서 x^3의 계수로부터 구할 수 있다.

$(1+ax)^9$의 전개식에서 일반항은

${}_9C_r1^{9-r}(ax)^r={}_9C_r\times a^r\times x^r$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 9)$

이때 x^3의 계수는 $r=3$일 때이므로

$\frac{{}_9C_3\times a^3}{a}=42$, $a^2=\frac{1}{2}$

따라서 $a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ③

다른 풀이

주어진 다항식에서 x^2항은

$(1+ax)^n$ $(n=2, 3, 4, \cdots, 8)$

의 전개식에서 나타난다.

$(1+ax)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r1^{n-r}(ax)^r={}_nC_r\times a^r\times x^r$ $(r=0, 1, 2, \cdots, n)$

x^2의 계수는 $r=2$일 때이므로

${}_nC_2\times a^2$

따라서 주어진 다항식의 전개식에서 x^2의 계수는

$$\sum_{n=2}^{8}({}_nC_2\times a^2)=\frac{a^2}{2}\sum_{n=2}^{8}(n^2-n)$$
$$=\frac{a^2}{2}\left\{\left(\frac{8\times9\times17}{6}-1\right)-\left(\frac{8\times9}{2}-1\right)\right\}$$
$$=84a^2$$

주어진 다항식의 전개식에서 x^2의 계수가 42이므로

$84a^2=42$, $a^2=\frac{1}{2}$

따라서 $a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

31

다항식 $3\{(a+x)^n-(a-x)^n\}$에 대하여

$(a+x)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_nC_r a^{n-r}x^r$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)

이때 x^{n-1}의 계수는 $r=n-1$일 때이므로

${}_nC_{n-1}\times a$

또 $(a-x)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_nC_r a^{n-r}(-x)^r$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)

이때 x^{n-1}의 계수는 $r=n-1$일 때이므로

${}_nC_{n-1}\times a\times(-1)^{n-1}$

그러므로 다항식 $3\{(a+x)^n-(a-x)^n\}$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$3\{{}_nC_{n-1}\times a-{}_nC_{n-1}\times a\times(-1)^{n-1}\}$

$=\begin{cases} 0 & (n\text{이 2 이상의 홀수}) \\ 6na & (n\text{이 2 이상의 짝수}) \end{cases}$ …… ㉠

다항식 $(a+x)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_nC_r a^{n-r}x^r$ (단, $r=0, 1, 2, \cdots, n$)

이므로 다항식 $x(a+x)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 $r=n-2$일 때이다.

${}_nC_{n-2}a^2=\dfrac{n(n-1)}{2}\times a^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 두 다항식 $3\{(a+x)^n-(a-x)^n\}$과 $x(a+x)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수가 서로 같게 되려면 다음과 같다.

(i) n이 2 이상의 홀수인 경우

$0=\dfrac{n(n-1)}{2}\times a^2$

에서 $n(n-1)a^2=0$이므로 2 이상의 자연수 n과 자연수 a는 존재하지 않는다.

(ii) n이 2 이상의 짝수인 경우

$6na=\dfrac{n(n-1)}{2}\times a^2$

에서 $(n-1)a=12$이므로 이 등식을 만족시키는 2 이상의 짝수 n과 자연수 a의 순서쌍 (n, a)는 $(2, 12)$, $(4, 4)$

(i), (ii)에서 $n+a$의 최댓값은 14이다.

답 14

32

$(1+x)^{51}={}_{51}C_0+{}_{51}C_1x+{}_{51}C_2x^2+\cdots+{}_{51}C_{50}x^{50}+{}_{51}C_{51}x^{51}$

이 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{51}={}_{51}C_0+{}_{51}C_1+{}_{51}C_2+\cdots+{}_{51}C_{24}+{}_{51}C_{25}$
$+{}_{51}C_{26}+{}_{51}C_{27}+{}_{51}C_{28}+\cdots+{}_{51}C_{50}+{}_{51}C_{51}$

이때 ${}_{51}C_r={}_{51}C_{51-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 51)$이므로

$2^{51}=2({}_{51}C_0+{}_{51}C_1+{}_{51}C_2+\cdots+{}_{51}C_{24}+{}_{51}C_{25})$

${}_{51}C_0+{}_{51}C_1+{}_{51}C_2+\cdots+{}_{51}C_{24}+{}_{51}C_{25}=2^{50}$

따라서

$\log_2\{2^{51}-({}_{51}C_0+{}_{51}C_1+{}_{51}C_2+\cdots+{}_{51}C_{24}+{}_{51}C_{25})\}$

$=\log_2(2^{51}-2^{50})$

$=\log_2\{2^{50}(2-1)\}$

$=\log_2 2^{50}=50$

답 ③

33

$f(n)=\sum_{k=1}^{2n}\dfrac{{}_{2n}C_k}{5}$

$=\dfrac{1}{5}({}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1}+{}_{2n}C_{2n}-{}_{2n}C_0)$

$=\dfrac{1}{5}(2^{2n}-1)$

$=\dfrac{1}{5}(4^n-1)$

$f(n)$이 자연수가 되려면 4^n-1이 5의 배수가 되어야 하는데 4^n은 일의 자리의 수가 4 또는 6이므로 두 자리 자연수 n에 대하여 4^n의 일의 자리의 숫자가 6이어야 한다.

따라서 4^n의 일의 자리의 숫자가 6인 경우는 n이 짝수일 때이므로 두 자리 자연수 n은 10, 12, 14, …, 96, 98이고 그 개수는 45이다.

답 45

34

서로 다른 종류의 학용품 10개 중에서 2개 이상의 학용품을 골라 포장하여 만들 수 있는 선물 세트는 모두 다른 선물 세트이다.

그러므로 구하는 선물 세트의 종류의 가짓수는 10개에서 r $(2\le r\le 10)$개를 택하는 조합의 수와 같다. 즉,

${}_{10}C_2+{}_{10}C_3+{}_{10}C_4+\cdots+{}_{10}C_9+{}_{10}C_{10}$

$={}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_9+{}_{10}C_{10}-({}_{10}C_0+{}_{10}C_1)$

$=2^{10}-(1+10)$

$=1024-11=1013$

답 ②

08 확률

정답 본문 101~113쪽

01 ④	02 ③	03 ③	04 ②	05 ②
06 ②	07 ①	08 ①	09 ⑤	10 ④
11 ②	12 57	13 ④	14 ③	15 ③
16 ③	17 19	18 ④	19 43	20 ⑤
21 ②	22 ③	23 ⑤	24 ③	25 ④
26 ⑤	27 ④	28 ②	29 ②	30 ③
31 ②	32 ①	33 ②	34 47	35 ⑤
36 ③	37 ③	38 302	39 551	

01

두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 눈의 수를 각각 a, b라 하자.
a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는
$6\times6=36$
두 개의 주사위의 눈의 수의 합이 3의 배수가 되려면 3, 6, 9, 12가 되어야 한다.
(ⅰ) 두 눈의 수의 합이 3인 순서쌍 (a, b)는
$(1, 2)$, $(2, 1)$
(ⅱ) 두 눈의 수의 합이 6인 순서쌍 (a, b)는
$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$
(ⅲ) 두 눈의 수의 합이 9인 순서쌍 (a, b)는
$(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$
(ⅳ) 두 눈의 수의 합이 12인 순서쌍 (a, b)는
$(6, 6)$
(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 확률은
$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

답 ④

02

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
방정식 $x^2=ab+a$에서 $x^2=a(b+1)$
$a(b+1)$은 자연수이므로 이 값이 제곱수일 때 이차방정식 $x^2=ab+a$의 근이 유리수가 되므로 $a(b+1)$의 값은 1, 4, 9, 16, 25, 36이어야 한다.
즉, 두 수 a, $b+1$의 순서쌍 $(a, b+1)$은 $b+1\geq2$이므로
$(1, 4)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$
따라서 두 수 a, b의 순서쌍 (a, b)는
$(1, 3)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 5)$
의 6가지이므로 구하는 확률은
$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

답 ③

03

숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 5장의 카드를 임의로 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 다섯 자리 자연수의 개수는
$5\times4\times3\times2\times1=120$
천의 자리에 짝수를 배열하는 경우의 수는 2이고 일의 자리에 홀수를 배열하는 경우의 수는 3이다. 남은 짝수 1개와 홀수 2개를 만의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 배열하는 경우의 수는 $3\times2\times1=6$이다.
따라서 구하는 확률은
$\frac{2\times3\times6}{120}=\frac{3}{10}$

답 ③

04

상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는
1과 2, 1과 3, 1과 4, 1과 5, 1과 6, 1과 7
2와 3, 2와 4, 2와 5, 2와 6, 2와 7
3과 4, 3과 5, 3과 6, 3과 7
4와 5, 4와 6, 4와 7
5와 6, 5와 7
6과 7
이므로 21가지이다.
2개의 공에 적힌 수가 모두 홀수인 경우의 수는 6이고 2개의 공에 적힌 수가 모두 짝수인 경우의 수는 3이다.
따라서 구하는 확률은
$\frac{6+3}{21}=\frac{3}{7}$

답 ②

05

직선 $y=2x+n$을 $x^2+y^2=5$에 대입하면
$x^2+(2x+n)^2=5$
$5x^2+4nx+n^2-5=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하자. 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(2n)^2-5(n^2-5)$
$=-n^2+25>0$
에서 $(n+5)(n-5)<0$이므로
$-5<n<5$
따라서 20 이하의 자연수 n은 1, 2, 3, 4이므로 구하는 확률은
$\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

답 ②

다른 풀이

원 $x^2+y^2=5$의 중심 $(0, 0)$과 직선 $2x-y+n=0$ 사이의 거리를 d라 하면
$d=\frac{|0-0+n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|n|}{\sqrt{5}}$
이고, 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<\sqrt{5}$이어야 한다.

즉, $\frac{|n|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$, $|n|<5$에서

$-5<n<5$

따라서 20 이하의 자연수 n은 1, 2, 3, 4이므로 구하는 확률은

$\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

06

서로 다른 7장의 카드에서 3장의 카드를 차례로 꺼내는 경우의 수는

$7\times6\times5=210$

$3a+2b+c$가 짝수이려면 b의 값에 관계없이 a와 c는 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

1부터 7까지의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7의 4개이고 짝수는 2, 4, 6의 3개이므로 $3a+2b+c$가 짝수인 경우의 수는 다음과 같다.

(i) a, c가 모두 짝수일 때

세 장의 카드를 차례로 꺼내는 경우의 수는

b가 홀수이면 $3\times4\times2=24$

b가 짝수이면 $3\times2\times1=6$

(ii) a, c가 모두 홀수일 때

세 장의 카드를 차례로 꺼내는 경우의 수는

b가 홀수이면 $4\times3\times2=24$

b가 짝수이면 $4\times3\times3=36$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{24+6+24+36}{210}=\frac{3}{7}$

답 ②

07

7장의 카드를 모두 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!$

짝수 번째 자리에 짝수가 적힌 카드가 위치하는 경우의 수는 짝수 번째 자리에 짝수가 적힌 3장의 카드를 먼저 나열하고 나머지 홀수가 적힌 4장의 카드를 홀수 번째 자리에 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3!\times4!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3!\times4!}{7!}=\frac{1}{35}$

답 ①

08

주머니에서 꺼낸 5개의 구슬에 적힌 숫자를 일렬로 나열하여 다섯 자리 자연수를 만드는 모든 경우의 수는

${}_7\mathrm{P}_5$

일의 자리의 숫자를 a, 만의 자리의 숫자를 b, 백의 자리의 숫자를 k $(k=2, 3, 4, 5, 6)$이라 하면

$a+b=2k$

이 등식을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는 다음과 같다.

(i) $k=2$일 때

$(1, 3)$, $(3, 1)$

(ii) $k=3$일 때

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$

(iii) $k=4$일 때

$(1, 7)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$, $(7, 1)$

(iv) $k=5$일 때

$(3, 7)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$, $(7, 3)$

(v) $k=6$일 때

$(5, 7)$, $(7, 5)$

(i)~(v)의 모든 경우의 수는 $2+4+6+4+2=18$이고, 그 각각에 대하여 나머지 4개의 구슬에서 2개의 구슬을 택하여 적혀 있는 2개의 숫자를 십의 자리와 천의 자리에 나열하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2$

따라서 구하는 확률은

$\frac{18\times{}_4\mathrm{P}_2}{{}_7\mathrm{P}_5}=\frac{3}{35}$

답 ①

09

6개의 구슬을 네 명 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 모든 경우의 수는

${}_4\Pi_6=4^6$

6개의 구슬 중에서 두 사람 A, B에게 각각 2개, 1개만 나누어 주는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1=60$

이 각각에 대하여 남은 3개의 구슬을 모두 두 명 C, D에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3$

따라서 구하는 확률은

$\frac{60\times2^3}{4^6}=\frac{15}{128}$

답 ⑤

10

모두 9명의 학생이 원형 탁자의 의자에 둘러 앉는 모든 경우의 수는

$(9-1)!=8!$

1학년 학생 2명을 묶어 한 명으로 생각하면 3학년 학생 4명을 포함하여 5명이 원형 탁자의 의자에 앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!$

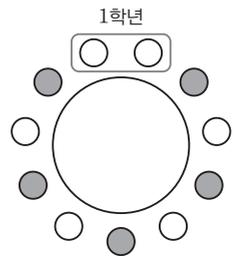
이때 1학년 학생 2명이 서로 자리를 바꿔 앉는 경우의 수는 $2!$

그림과 같이 2학년 학생 3명이 1학년 학생과 3학년 학생 사이사이의 5개의 ● 자리 중에서 3개의 자리를 택하여 앉는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_3$

1학년

따라서 구하는 확률은

$\frac{4!\times2!\times{}_5\mathrm{P}_3}{8!}=\frac{1}{14}$

답 ④

11

B, C가 적혀 있는 카드가 각각 1장, K가 적혀 있는 카드가 2장, O가 적혀 있는 카드가 4장이고 이 8장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!\times4!}=840$

O가 적힌 4장의 카드가 처음부터 연속하여 나열되는 경우의 수는 O가 적혀 있는 카드 4장을 제외한 B, C가 적혀 있는 카드 각각 1장, K가 적혀 있는 카드 2장이 일렬로 나열되는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{840}=\frac{1}{70}$

답 ②

12

주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_7C_3=35$

주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 공의 색깔이 2가지로 나올 경우는 다음과 같다.

공의 색깔		경우의 수
흰 공 2개	검은 공 1개	${}_3C_2\times{}_2C_1=6$
검은 공 2개	흰 공 1개	${}_2C_2\times{}_3C_1=3$
흰 공 2개	파란 공 1개	${}_3C_2\times{}_2C_1=6$
파란 공 2개	흰 공 1개	${}_2C_2\times{}_3C_1=3$
검은 공 2개	파란 공 1개	${}_2C_2\times{}_2C_1=2$
파란 공 2개	검은 공 1개	${}_2C_2\times{}_2C_1=2$

이때 확률은

$\frac{6+3+6+3+2+2}{35}=\frac{22}{35}$

따라서 $p=35$, $q=22$이므로

$p+q=35+22=57$

답 57

다른 풀이

주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_7C_3=35$

(i) 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 공의 색깔이 1가지로 나올 경우의 수는

${}_3C_3=1$

(ii) 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때 공의 색깔이 3가지로 나올 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1=12$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$1-\frac{1+12}{35}=\frac{22}{35}$

따라서 $p=35$, $q=22$이므로

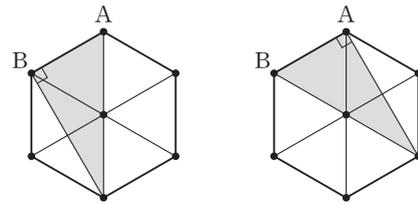
$p+q=35+22=57$

13

정육각형의 6개의 꼭짓점 중 임의로 서로 다른 3개를 택하여 만들 수 있는 삼각형 전체의 개수는

${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

이 삼각형 중에서 두 변의 길이의 합이 3이 되는 것은 다음과 같다.

그림과 같이 정육각형의 두 꼭짓점 A, B와 꼭짓점 A 또는 B와 맞은편에 있는 꼭짓점을 택하여 직각삼각형을 만들 때, 이 직각삼각형의 빗변의 길이가 2이다.

즉, 삼각형의 세 변 중에서 두 변의 길이의 합이 3이 되려면 그림과 같은 직각삼각형일 때이고 그 개수는

$6\times2=12$

이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

답 ④

14

방정식 $a+b+c+d=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 서로 다른 4개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_{10}={}_{4+10-1}C_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=286$

조건 (가)에서 c, d는 자연수이므로

$c=c'+1$, $d=d'+1$ (c', d'은 음이 아닌 정수)

라 하면

$a+b+c'+d'=8$

(i) $b=0$일 때

조건 (나)에서 $a\geq1$이므로 $a=a'+1$ (a'은 음이 아닌 정수)라 하면

$a'+c'+d'=7$

그러므로 경우의 수는

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

(ii) $b=1$일 때

조건 (나)에서 $a\geq3$이므로 $a=a'+3$ (a'은 음이 아닌 정수)라 하면

$a'+c'+d'=4$

그러므로 경우의 수는

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

(iii) $b=2$일 때

조건 (나)에서 $a\geq5$이므로 $a=a'+5$ (a'은 음이 아닌 정수)라 하면

$a'+c'+d'=1$

그러므로 경우의 수는

${}_3H_1={}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$

(iv) $b\geq3$일 때

조건 (나)에서 $a\geq7$이므로

$c+d\leq0$

그러므로 조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d는 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 확률은

$\dfrac{36+15+3}{286}=\dfrac{27}{143}$

답 ③

15

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{1}{12}$

에서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{11}{12}$

$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=\dfrac{5}{12}$

에서 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{7}{12}$

따라서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\dfrac{11}{12}=\mathrm{P}(A)+\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{6}$

이므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$

답 ③

16

8개의 구슬이 들어 있는 주머니에서 임의로 두 개의 구슬을 동시에 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_2=28$

꺼낸 두 개의 구슬에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하자.

2가 두 수 a, b의 공약수일 사건을 A라 하면 사건 A가 일어나는 경우의 수는

$a=2$일 때, $b=4, 6, 8$

$a=4$일 때, $b=6, 8$

$a=6$일 때, $b=8$

이므로 6이다. 즉,

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{6}{28}$

3이 두 수 a, b의 공약수일 사건을 B라 하면 사건 B가 일어나는 경우의 수는

$a=3$일 때, $b=6, 9$

$a=6$일 때, $b=9$

이므로 3이다. 즉,

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{28}$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\dfrac{6}{28}+\dfrac{3}{28}=\dfrac{9}{28}$

답 ③

다른 풀이

2가 공약수일 사건을 A, 3이 공약수일 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{6}{28}$

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{28}$

따라서 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{6}{28}+\dfrac{3}{28}=\dfrac{9}{28}$

17

카드 7장을 모두 사용하여 임의로 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 $7!$

1이 적혀 있는 카드의 바로 양쪽 옆에 짝수가 적혀 있는 카드가 나열되는 사건을 A, 2가 적혀 있는 카드의 바로 양쪽 옆에 홀수가 적혀 있는 카드가 나열되는 사건을 B라 하자.

사건 A가 일어날 확률은 1이 적혀 있는 카드의 바로 양쪽 옆에 짝수가 적혀 있는 카드가 나열되는 경우의 수가 ${}_3\mathrm{P}_2=6$이고, 이것을 한 묶음으로 생각하여 5장이 일렬로 나열되는 경우의 수가 $5!$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{6\times5!}{7!}=\dfrac{1}{7}$

사건 B가 일어날 확률은 2가 적혀 있는 카드의 바로 양쪽 옆에 홀수가 적혀 있는 카드가 나열되는 경우의 수가 ${}_4\mathrm{P}_2=12$이고, 이것을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열되는 경우의 수가 $5!$이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{12\times5!}{7!}=\dfrac{2}{7}$

이때 사건 $A\cap B$가 일어나는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 1이 적혀 있는 카드의 바로 양쪽 옆에 2가 적혀 있는 카드를 제외한 짝수가 적혀 있는 카드가 나열되고, 2가 적혀 있는 카드의 바로 양쪽 옆에 1을 제외한 홀수가 적혀 있는 카드가 나열되는 경우의 수는 각각 ${}_2\mathrm{P}_2$, ${}_3\mathrm{P}_2$이고 이들 각각을 한 묶음으로 생각하여 나열되는 경우의 수는 $3!$이므로

${}_2\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{P}_2\times3!=2\times6\times6=72$

(ⅱ) 1이 적혀 있는 카드와 2가 적혀 있는 카드가 이웃하게 나열되는 경우

1이 적혀 있는 카드 바로 옆에 2가 적혀 있는 카드가 나열되는 경우의 수는 2, 이 두 장의 카드를 한 묶음으로 생각하여 바로 양쪽 옆에 홀수가 적혀 있는 카드 1장과 짝수가 적혀 있는 카드 1장이 나열되는 경우의 수는

[짝] [1] [2] [홀], [홀] [2] [1] [짝]

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=6$

이것을 한 묶음으로 생각하여 남은 홀수가 적혀 있는 카드 2장, 짝수가 적혀 있는 카드 1장과 함께 나열되는 경우의 수는 $4!=24$이므로

$2\times6\times24=288$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{72+288}{7!}=\dfrac{1}{14}$

이때 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{7}-\dfrac{1}{14}$

$=\dfrac{5}{14}$

따라서 $p=14$, $q=5$이므로

$p+q=14+5=19$

답 19

18

주머니에서 임의로 동시에 2개의 구슬을 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_2=36$

꺼낸 2개의 구슬에 적힌 두 수의 곱이 짝수일 사건을 A라 하면 사건 A^C은 꺼낸 2개의 구슬에 적힌 두 수의 곱이 홀수일 사건이다.

꺼낸 2개의 구슬에 적힌 두 수가 모두 홀수일 때, 두 수의 곱이 홀수가 된다. 홀수가 적힌 5개의 구슬 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=10$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$

답 ④

19

여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 5를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

1이 3보다 왼쪽에 나열되거나 4가 2보다 왼쪽에 나열될 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 1이 3보다 오른쪽에 나열되고 4가 2보다 오른쪽에 나열되는 사건이다. 즉, 사건 A^C은 두 수 1, 3과 두 수 2, 4의 순서가 정해져 있으므로 두 수 1, 3을 모두 1로 생각하고 두 수 2, 4를 모두 2로 생각하여 여섯 개의 숫자 1, 2, 1, 2, 5, 5를 모두 일렬로 나열한 다음 첫 번째 1을 3으로 바꾸고 두 번째 2를 4로 바꾸면 된다.

이때 1, 1, 2, 2, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!\times2!}=90$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{90}{360}=\frac{1}{4}$

이때 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

따라서 $p=4$, $q=3$이므로

$10p+q=10\times4+3=43$

답 43

20

처음 또는 마지막에 여자가 경연하게 되는 사건을 A라 하면 A^C은 남자가 처음과 마지막에 경연하게 되는 사건이다.

7명이 경연 순번을 정하는 경우의 수는 7!

남자가 처음과 마지막에 순번이 정해지는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2$

이 각각에 대하여 나머지 남자 2명과 여자 3명 모두가 경연 순번을 정하는 경우의 수는 5!이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_4\mathrm{P}_2\times5!}{7!}=\frac{2}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

답 ⑤

21

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

이때

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{1}{4}$

에서

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

답 ②

22

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\mathrm{P}(A\cap B)$

이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)$가 최소일 때 $\mathrm{P}(B|A)$도 최소이다.

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

에서 $\mathrm{P}(A\cup B)\le1$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$\ge\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A\cap B)$의 최솟값이 $\frac{1}{4}$이므로 $\mathrm{P}(B|A)$의 최솟값은

$\frac{4}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$

답 ③

23

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{4}$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$ …… ㉠

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(A)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(A)$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{3}\mathrm{P}(A)$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{3}{4}=\mathrm{P}(A)+\frac{4}{3}\mathrm{P}(A)-\frac{1}{3}\mathrm{P}(A)$

따라서

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$

답 ⑤

24

이 고등학교 3학년 학생이 방과후학교를 수강하는 사건을 A, 석식을 신청하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|B^C)$이다.

이때

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{60}{200}=\frac{3}{10}$,

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{40}{200}=\frac{1}{5}$

이므로

$$\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{3}$$

답 ③

25

300명 중 임의로 선택한 사람이 A회사의 스마트폰을 이용하는 사람인 사건을 A, 비밀번호 인증을 선호하는 사람인 사건을 W라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(W|A^C)$이다.

주어진 조건에서

$\mathrm{P}(A\cap W^C)=\frac{c}{300}=\frac{2}{5}$

이므로 $c=120$이다. 이때

$d=180-c=60$,

$b=150-d=90$

이고

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{150}{300}=\frac{1}{2}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap W)=\frac{b}{300}=\frac{90}{300}=\frac{3}{10}$

이므로

$$\mathrm{P}(W|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap W)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}$$

답 ④

26

30장의 카드 중 임의로 택한 한 장의 카드에 적힌 수가 짝수인 사건을 A, 15 이하인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

이때

$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{30}$

이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{30}}{\frac{1}{2}}=\frac{7}{15}$$

답 ⑤

27

주머니의 10개의 공 중 임의로 꺼낸 1개의 공이 흰 공인 사건을 A, 민호가 가지고 있던 공인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

이때

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{2}{3}$$

답 ④

28

주머니 A에서 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 곱이 홀수인 경우는 세 수 모두 홀수인 경우이므로 그 확률은

$\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{1}{8}$

세 수의 곱이 짝수인 경우는 그 여사건이므로 그 확률은

$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 합이 10인 경우는 두 수 모두 5인 경우이므로 그 확률은

$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

주머니 C에서 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 합이 10인 경우는 4와 6이 한 번씩 나오는 경우이므로 그 확률은

$2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

따라서 시행 [Ⅱ]에서 꺼낸 두 공에 적힌 수의 합이 10이 되는 사건을 T라 하면

$\mathrm{P}(T)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{9}+\frac{7}{8}\times\frac{2}{9}=\frac{5}{24}$

시행 [Ⅰ]에서 첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수가 1인 사건을 S라 하자. 세 수의 곱이 홀수인 경우는 나머지 2개의 공에 적힌 수도 모두 홀수인 경우이므로 그 확률은

$\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{24}$

세 수의 곱이 짝수인 경우는 나머지 2개의 공에 적힌 수의 곱이 짝수인 경우이므로 그 확률은

$\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{24}$

따라서

$\mathrm{P}(S\cap T)=\frac{1}{24}\times\frac{1}{9}+\frac{3}{24}\times\frac{2}{9}=\frac{7}{216}$

이고

$$\mathrm{P}(S|T)=\frac{\mathrm{P}(S\cap T)}{\mathrm{P}(T)}=\frac{\frac{7}{216}}{\frac{5}{24}}=\frac{7}{45}$$

답 ②

29

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

이고 두 사건 A^C과 B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$이고

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

답 ②

30

$\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$가 이차방정식 $4ax^2-3x+a=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4a}$, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{a}{4a}=\frac{1}{4}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

에서

$\frac{7}{8}=\frac{3}{4a}-\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4a}=\frac{9}{8}$

따라서 $a=\frac{2}{3}$

답 ③

31

주머니 A에서 꺼낸 공에 따라 두 가지 경우로 나누어 확률을 구할 수 있다.

(ⅰ) 주머니 A에서 흰 공을 꺼낸 경우

주머니 B에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내야 하므로 그 확률은

$\frac{2}{6}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}\times\frac{2\times3}{10}=\frac{1}{5}$

(ⅱ) 주머니 A에서 검은 공을 꺼낸 경우

주머니 C에서 흰 공 2개를 꺼내야 하므로 그 확률은

$\frac{4}{6}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3}\times\frac{6}{15}=\frac{4}{15}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{5}+\frac{4}{15}=\frac{7}{15}$

답 ②

32

5번째 시행 후 시행이 멈추려면 4번째 시행까지 3의 배수가 적힌 공 2개, 3의 배수가 아닌 수가 적힌 공 2개를 꺼내고 5번째 시행에서 3의 배수가 적힌 공을 꺼내야 한다.

10개의 공 중에서 4개의 공을 차례로 꺼낼 때 나오는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{P}_4$

4번째 시행까지 3의 배수가 적힌 공 2개, 3의 배수가 아닌 수가 적힌 공 2개를 꺼내어 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_2\times4!$

따라서 4번째 시행까지 3의 배수가 적힌 공 2개, 3의 배수가 아닌 수가 적힌 공 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_2\times4!}{{}_{10}\mathrm{P}_4}=\frac{3\times21\times24}{10\times9\times8\times7}=\frac{3}{10}$

5번째 시행에서 3의 배수가 적힌 공을 꺼낼 확률은 $\frac{1}{6}$이므로 구하는 확률은

$\frac{3}{10}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{20}$

답 ①

33

$x_1=\frac{1}{2}$이므로

$x_2=\frac{1}{4}a_1$, $x_3=a_2x_2(1-x_2)$, $x_4=a_3x_3(1-x_3)$

$a_3>0$이므로 $x_4>0$이기 위해서는 $0<x_3<1$이어야 한다.

a_1의 값에 따라 x_2, $x_2(1-x_2)$의 값을 구하면 다음과 같다.

a_1	1	2	3	4	5	6
x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
$x_2(1-x_2)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	0	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{3}{4}$

이때 a_1, a_2의 값에 따라 $0<x_3<1$인 경우는 다음 세 가지 경우이다.

(ⅰ) $a_1=1$이고 $a_2\le5$인 경우의 확률은

$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$

(ⅱ) $a_1=2$이고 $a_2\le3$인 경우의 확률은

$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(ⅲ) $a_1=3$이고 $a_2\le5$인 경우의 확률은

$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$\frac{5}{36}+\frac{1}{12}+\frac{5}{36}=\frac{13}{36}$

답 ②

34

승진이와 여학생 3명이 대표 학생으로 선출되는 경우는 다음과 같은 2가지가 있다.

(ⅰ) 여학생 3명이 먼저 선출되는 경우

남학생 12명 중 승진이가 선출되어야 하므로 구하는 확률은

$\frac{{}_{11}\mathrm{C}_3}{{}_{23}\mathrm{C}_3}\times\frac{1}{{}_{12}\mathrm{C}_1}=\frac{5}{644}$

(ⅱ) 승진이와 여학생 2명이 먼저 선출되는 경우

나머지 20명 중 여학생 1명이 선출되어야 하므로 구하는 확률은

$\frac{1\times{}_{11}\mathrm{C}_2}{{}_{23}\mathrm{C}_3}\times\frac{{}_9\mathrm{C}_1}{{}_{20}\mathrm{C}_1}=\frac{9}{644}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{5}{644}+\frac{9}{644}=\frac{1}{46}$

따라서 $p=46$, $q=1$이므로

$p+q=46+1=47$

답 47

35

6개의 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 사건 A는 6번 중 적어도 한 번 짝수가 나오는 사건이고 그 여사건 A^C은 6번 모두 홀수가 나오는 사건이다.

$P(A^C)={}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

이므로

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$

답 ⑤

36

5번의 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 r라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $5-r$이므로 5번의 시행에서 얻는 점수는

$200\times r+(-100)\times(5-r)=300r-500$

$300r-500\geq 700$에서 $r\geq 4$

즉, 앞면이 4번 또는 5번 나오는 경우이므로 구하는 확률은

${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)+{}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$

답 ③

37

두 개의 동전을 던져서 모두 앞면이 나오는 사건을 A라 하면 적어도 한 개가 뒷면이 나오는 사건은 A^C이고

$P(A)=\frac{1}{4}$, $P(A^C)=\frac{3}{4}$

두 개의 동전을 동시에 던지는 시행을 5번 할 때, 사건 A가 일어난 횟수를 r라 하면 점 P의 x좌표는 $2r$이고 y좌표는 $5-r$이므로 $\overline{OP}=5$에서

$\overline{OP}=\sqrt{(2r)^2+(5-r)^2}=\sqrt{5r^2-10r+25}=5$

$5r^2-10r+25=25$

$5r(r-2)=0$

따라서 $r=0$ 또는 $r=2$이므로 구하는 확률은

${}_5C_0\left(\frac{3}{4}\right)^5+{}_5C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3$

$=\frac{243}{1024}+\frac{270}{1024}$

$=\frac{513}{1024}$

답 ③

38

한 개의 주사위를 5번 던진 후 점 A와 점 C가 빨간색 선분을 따라 연결되는 경우는 다음과 같다.

(i) 다섯 개의 선분이 모두 빨간색인 경우

점 A에서 빨간색 선분을 따라 점 C와 항상 연결되어 있고 그 확률은

${}_5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$

(ii) 네 개의 선분이 빨간색인 경우

점 A에서 빨간색 선분을 따라 점 C와 항상 연결되어 있고 그 확률은

${}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{243}$

(iii) 세 개의 선분이 빨간색인 경우

(a_1, a_4, a_5)나 (a_2, a_3, a_5)에 빨간색이 색칠되는 경우를 제외하면 점 A에서 빨간색 선분을 따라 점 C와 연결되어 있고 그 확률은

$({}_5C_3-2)\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{32}{243}$

(iv) 두 개의 선분이 빨간색인 경우

(a_1, a_2)나 (a_4, a_3)에 빨간색으로 색칠되면 되므로 그 확률은

$2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{243}$

(i)~(iv)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{243}+\frac{10}{243}+\frac{32}{243}+\frac{16}{243}=\frac{59}{243}$

따라서 $p=243$, $q=59$이므로

$p+q=243+59=302$

답 302

39

처음에 점 P가 점 A에 있을 때 $X=0$이라 하고 시곗바늘이 도는 방향으로 1만큼 이동할 때 X의 값에 $+1$, 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 1만큼 이동할 때 X의 값에 -1을 더하면 주사위를 10번 던질 때 점 P가 점 A에 있는 경우 X의 값은 -8, 0, 8인 경우이고, 점 F에 있는 경우 X의 값은 -3, 5인 경우이다.

사건 S에서 X의 값이 -8, 8, 0인 경우의 사건을 각각 S_1, S_2, S_3이라 하고 사건 T가 동시에 일어나는 경우의 확률을 각각 구해 보자.

(i) $X=-8$인 경우

점 P가 시곗바늘이 도는 반대 방향으로 정팔각형을 한 바퀴 이동하여 다시 점 A로 오는 경우이므로 반드시 점 F를 지나게 된다.

즉, 사건 S_1은 사건 T에 포함된다.

사건 S_1은 10번의 시행 중 3의 배수의 눈이 1번, 3의 배수가 아닌 눈이 9번 나오는 사건이므로

$P(S_1\cap T)=P(S_1)={}_{10}C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^9=\frac{10\times 2^9}{3^{10}}=\frac{5120}{3^{10}}$

(ii) $X=8$인 경우

점 P가 시곗바늘이 도는 방향으로 정팔각형을 한 바퀴 이동하여 다시 점 A로 오는 경우이므로 반드시 점 F를 지나게 된다.

즉, 사건 S_2는 사건 T에 포함된다.

사건 S_2는 10번의 시행 중 3의 배수의 눈이 9번, 3의 배수가 아닌 눈이 1번 나오는 사건이므로

$P(S_2\cap T)=P(S_2)={}_{10}C_1\left(\frac{1}{3}\right)^9\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{10\times 2}{3^{10}}=\frac{20}{3^{10}}$

(iii) $X=0$인 경우

점 P에 대하여 X의 값이 적어도 한 번 5가 되는 사건을 T_1, X의 값이 적어도 한 번 -3이 되는 사건을 T_2라 하면 10회의 시행에서 T_1과 T_2가 동시에 일어날 수는 없다.

(a) $S_3\cap T_1$이 일어나는 경우

10번의 시행에서 3의 배수의 눈이 연속 5번 나오고 다음으로 3의 배수가 아닌 눈이 연속 5번 나와야 하므로 그 확률은

$P(S_3\cap T_1)=\left(\frac{1}{3}\right)^5\times\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{3^{10}}$

(b) $S_3\cap T_2$가 일어나는 경우

10번의 시행 후 $X=0$이 되어야 하므로 3회, 5회, 7회 시행 후에 처음으로 $X=-3$이 되는 경우가 가능하다.

3회 시행 후 처음으로 $X=-3$이 되는 경우 나머지 7회의 시행에서 3의 배수의 눈이 5번, 3의 배수가 아닌 눈이 2번 나와야 하므로 그 확률은

$\left(\frac{2}{3}\right)^3\times {}_7\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8\times21\times4}{3^{10}}=\frac{672}{3^{10}}$

5회 시행 후 처음으로 $X=-3$이 되는 경우 3회의 시행까지 3의 배수의 눈이 1번, 3의 배수가 아닌 눈이 2번 나오고 연속으로 3의 배수가 아닌 눈이 2번 나온 후 나머지 5회의 시행에서 3의 배수의 눈이 4번, 3의 배수가 아닌 눈이 1번 나와야 하므로 그 확률은

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times {}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{480}{3^{10}}$

7회 시행 후 처음으로 $X=-3$이 되는 경우 5회의 시행에서 $X=-1$이고 6, 7회의 시행에서 연속으로 3의 배수가 아닌 눈이 2번 나오고, 나머지 3번은 3의 배수의 눈이 나와야 한다. 처음 5회의 시행에서 3의 배수의 눈이 2번, 3의 배수가 아닌 눈이 3번 나와야 하고 이때 3의 배수가 아닌 눈이 먼저 연속 3번 나오는 경우는 제외하여야 하므로 구하는 확률은

$({}_5\mathrm{C}_2-1)\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{288}{3^{10}}$

(a), (b)에서

$\mathrm{P}(S_3\cap T)=\frac{32}{3^{10}}+\frac{672}{3^{10}}+\frac{480}{3^{10}}+\frac{288}{3^{10}}=\frac{1472}{3^{10}}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{5120}{3^{10}}+\frac{20}{3^{10}}+\frac{1472}{3^{10}}=\frac{6612}{3^{10}}=\frac{2204}{3^9}$

$\frac{4p}{3^9}=\frac{2204}{3^9}$에서 $p=551$

답 551

09 통계

정답 본문 116~128쪽

01 ①	02 ②	03 46	04 ②	05 ③
06 ②	07 ⑤	08 ④	09 329	10 ④
11 ①	12 ①	13 ③	14 ④	15 ⑤
16 ④	17 ③	18 ②	19 ⑤	20 ③
21 ③	22 ④	23 ①	24 ②	25 ②
26 ①	27 ①	28 ⑤	29 ④	30 ⑤
31 ⑤	32 ①	33 ④	34 ③	35 ②
36 ③	37 ④	38 ④	39 97	

01

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+b=1$에서

$a+b=\frac{7}{12}$ …… ㉠

$\mathrm{P}(X\le2)=\frac{1}{2}$이므로

$a+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$에서

$a=\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{1}{4}$

따라서 $a-b=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

답 ①

02

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=9)$

$=\sum_{n=1}^{9}\frac{k}{n(n+1)}$

$=k\sum_{n=1}^{9}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

$=k\left(1-\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{9}{10}k=1$

에서 $k=\frac{10}{9}$

따라서 $\mathrm{P}(X=5)=\frac{\frac{10}{9}}{5\times6}=\frac{1}{27}$

답 ②

03

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.

$X=6$인 사건은 3번 모두 5 이하의 눈이 나오는 사건의 여사건이므로 그 확률은

$$P(X=6)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$$

$X=5$인 사건은 3번 모두 5 이하의 눈이 나오는 사건에서 3번 모두 4 이하의 눈이 나오는 사건을 제외하면 되므로 그 확률은

$$P(X=5)=\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{61}{216}$$

따라서

$$P(X\geq 5)=P(X=5)+P(X=6)$$
$$=\frac{61}{216}+\frac{91}{216}$$
$$=\frac{152}{216}=\frac{19}{27}$$

$p=27$, $q=19$이므로

$p+q=27+19=46$

답 46

다른 풀이

$X\geq 5$인 사건은 $X\leq 4$인 사건의 여사건이다.

$X\leq 4$인 사건은 한 개의 주사위를 3번 던져서 모두 4 이하의 눈이 나오는 사건이므로

$$P(X\leq 4)=\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{8}{27}$$

따라서

$$P(X\geq 5)=1-P(X\leq 4)=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

$p=27$, $q=19$이므로

$p+q=27+19=46$

04

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+2a+a=1$$

$3a=\frac{3}{8}$에서 $a=\frac{1}{8}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 $E(X)=0\times\frac{3}{8}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$

답 ②

05

주어진 확률분포에서

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+a\times\frac{1}{3}+b\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{a+b}{3}=\frac{7}{2}$$

에서 $a+b=9$ ······ ㉠

$$V(X)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+a^2\times\frac{1}{3}+b^2\times\frac{1}{3}-\left(\frac{7}{2}\right)^2$$
$$=\frac{a^2+b^2}{3}-\frac{137}{12}=\frac{43}{12}$$

에서 $a^2+b^2=45$ ······ ㉡

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$이므로 ㉠, ㉡에서

$9^2=45+2ab$

따라서 $ab=18$

답 ③

06

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

$$P(X=0)=\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_5C_2}{{}_8C_3}=\frac{3\times 10}{56}=\frac{15}{28}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_5C_1}{{}_8C_3}=\frac{3\times 5}{56}=\frac{15}{56}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{56}$$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

따라서

$$E(X)=0\times\frac{5}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{1}{56}$$
$$=\frac{63}{56}=\frac{9}{8}$$

답 ②

07

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+b=1$에서

$b=\frac{3}{4}-a$

$$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times a+3\times\left(\frac{3}{4}-a\right)$$
$$=\frac{9}{4}-2a$$

이므로

$$V(X)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times a+3^2\times\left(\frac{3}{4}-a\right)-\left(\frac{9}{4}-2a\right)^2$$
$$=a+9\times\left(\frac{3}{4}-a\right)-\left(\frac{81}{16}-9a+4a^2\right)$$
$$=-4a^2+a+\frac{27}{16}$$
$$=-4\left(a-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{7}{4}$$

따라서 $a=\frac{1}{8}$일 때 $V(X)$가 최대이고 최댓값은 $\frac{7}{4}$이다.

답 ⑤

08

세 번의 시행에서 나올 수 있는 전체 경우의 수는 3^3이다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 4이고 각각의 확률은 다음과 같다.

(i) $X=1$인 경우는 세 공의 색이 모두 다른 경우이고 그 경우의 수는 $3!$이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3!}{3^3}=\frac{2}{9}$

(ii) $X=2$인 경우는 세 공 중 2개의 공만 색이 서로 같은 경우이다. 같은 색을 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$, 나머지 한 개의 공의 색을 택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$, 순서가 바뀌는 경우가 $\frac{3!}{2!}$이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times\frac{3!}{2!}}{3^3}=\frac{2}{3}$

(iii) $X=4$인 경우는 세 공의 색이 모두 같은 경우이고 그 경우의 수는 3이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{3^3}=\frac{1}{9}$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{2}{3}+4\times\frac{1}{9}=2$이므로

$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{2}{9}+2^2\times\frac{2}{3}+4^2\times\frac{1}{9}-2^2=\frac{2}{3}$

답 ④

09

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고 각각의 확률은 다음과 같다.

(i) $X=1$일 때

첫 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 7 이상인 경우이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

(ii) $X=2$일 때

첫 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 6, 5, 4, 3, 2, 1일 때 두 번째 꺼낸 카드에 적힌 수를 더해서 7 이상이 되는 경우의 수는 각각 9, 8, 7, 7, 6, 5이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{9+8+7+7+6+5}{10\times9}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$

(iii) $X=4$일 때

세 번째까지 꺼낸 카드에 적힌 수의 합이 6 이하인 경우이므로 세 카드에 적힌 수가 1, 2, 3인 경우이다. 네 번째 꺼낸 카드에 적힌 수에 상관없이 합이 7 이상이 되므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3!}{10\times9\times8}\times\frac{7}{7}=\frac{1}{120}$

(iv) $X=3$일 때

전체 경우에서 (i), (ii), (iii)을 제외한 경우이므로

$\mathrm{P}(X=3)=1-\left(\frac{2}{5}+\frac{7}{15}+\frac{1}{120}\right)=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{120}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{7}{15}+3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{120}=\frac{209}{120}$

따라서 $p=120$, $q=209$이므로

$p+q=120+209=329$

답 329

10

확률의 총합은 1이므로

$a+2a+3a+6a=1$에서

$a=\frac{1}{12}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{12}+4\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{4}+8\times\frac{1}{2}=\frac{19}{3}$이므로

$\mathrm{E}(3X+8)=3\mathrm{E}(X)+8$

$=3\times\frac{19}{3}+8$

$=27$

답 ④

11

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+b+\frac{1}{6}=1$에서

$a+b=\frac{7}{12}$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times a+4\times b+8\times\frac{1}{6}$

$=2a+4b+\frac{19}{12}$

$\mathrm{E}(4X-3)=10$에서 $4\mathrm{E}(X)-3=10$이므로

$\mathrm{E}(X)=\frac{13}{4}$

즉, $2a+4b+\frac{19}{12}=\frac{13}{4}$에서

$2a+4b=\frac{5}{3}$

$a+2b=\frac{5}{6}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{4}$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서

$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{4}+8^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{13}{4}\right)^2=\frac{91}{16}$

이므로

$\mathrm{V}(4X-3)=16\mathrm{V}(X)=16\times\frac{91}{16}=91$

답 ①

12

다섯 장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!$이다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 각각의 확률은 다음과 같다.

(i) $X=0$인 경우

A, E가 적힌 2장의 카드를 하나로 보고 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$이고, A, E가 적힌 2장의 카드의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{4!\times2!}{5!}=\frac{2}{5}$

(ii) $X=1$인 경우

A, E가 적힌 2장의 카드 사이에 올 카드를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$이고, A, E가 적힌 2장의 카드의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이다. A, E가 적힌 2장의 카드와 사이에 있는 카드를 하나로 보고 3장의 카드를 나열하는 경우의 수는 $3!$이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times2!\times3!}{5!}=\frac{3}{10}$

(iii) $X=3$인 경우

A, E가 적힌 2장의 카드가 양 끝에 오고 사이에 B, C, D가 적힌 3장의 카드가 오는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2!\times3!}{5!}=\frac{1}{10}$

(iv) $X=2$인 경우

전체 경우에서 (i), (ii), (iii)을 제외하면 되므로

$\mathrm{P}(X=2)=1-\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{5}$

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{10}=1$

$\mathrm{V}(X)=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{10}-1^2=1$

따라서

$\mathrm{V}(5X-2)=25\mathrm{V}(X)=25\times1=25$

답 ①

13

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{4}=30$

$n=120$

따라서 $\mathrm{V}(X)=120\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{45}{2}$이므로

$\mathrm{V}(2X+5)=4\mathrm{V}(X)=4\times\frac{45}{2}=90$

답 ③

14

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{P}(X=k)={}_{10}\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}$

$\mathrm{P}(X=k+1)={}_{10}\mathrm{C}_{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{9-k}$

$12\times\mathrm{P}(X=k)=5\times\mathrm{P}(X=k+1)$에서

$12\times{}_{10}\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}=5\times{}_{10}\mathrm{C}_{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{9-k}$

$12\times{}_{10}\mathrm{C}_k\times\frac{1}{3}=5\times{}_{10}\mathrm{C}_{k+1}\times\frac{2}{3}$

$6\times{}_{10}\mathrm{C}_k=5\times{}_{10}\mathrm{C}_{k+1}$

$6\times\frac{10!}{k!(10-k)!}=5\times\frac{10!}{(k+1)!(9-k)!}$

$6\times\frac{1}{10-k}=5\times\frac{1}{k+1}$

$6(k+1)=5(10-k)$

따라서 $k=4$

답 ④

15

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 전체 경우의 수는 36이고, 나오는 눈의 수의 합이 10 이상인 경우는 합이 10인 경우 3가지, 합이 11인 경우 2가지, 합이 12인 경우 1가지이므로 그 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$이다.

게임을 60번 할 때 두 주사위의 눈의 수의 합이 10 이상인 횟수를 Y라 하면 9 이하인 횟수는 $60-Y$이므로 점수의 합 X는

$X=20\times Y-3\times(60-Y)=23Y-180$

확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(60, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=60\times\frac{1}{6}=10$

따라서

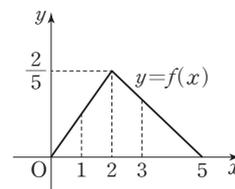
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\mathrm{E}(23Y-180)\\&=23\mathrm{E}(Y)-180\\&=23\times10-180\\&=50\end{aligned}$$

답 ⑤

16

$\mathrm{P}(0\le X\le5)=1$이므로

$\frac{1}{2}\times5\times k=1$

따라서 $k=\frac{2}{5}$

확률밀도함수를 $y=f(x)$라 하면

$f(1)=\frac{1}{2}f(2)=\frac{1}{5}$

$f(3)=\frac{2}{3}f(2)=\frac{4}{15}$

이므로

$\mathrm{P}(1\le X\le 3)$

$=1-\mathrm{P}(0\le X\le 1)-\mathrm{P}(3\le X\le 5)$

$=1-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\times 2\times\frac{4}{15}$

$=1-\frac{1}{10}-\frac{4}{15}$

$=\frac{19}{30}$

답 ④

17

연속확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면

$$f(x)=\begin{cases} a & (-3\le x<0) \\ \frac{b-a}{3}x+a & (0\le x\le 3) \end{cases}$$

$\mathrm{P}(-3\le X\le 3)=1$이므로

$3a+\frac{1}{2}\times(a+b)\times 3=1$에서

$3a+b=\frac{2}{3}$ …… ㉠

$\mathrm{P}(-3\le X\le 1)=\mathrm{P}(1\le X\le 3)$이므로

$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\frac{1}{2}\times\{f(1)+f(3)\}\times 2$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2a+b}{3}+b\right)\times 2$

$=\frac{2a+4b}{3}=\frac{1}{2}$

에서 $a+2b=\frac{3}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{7}{60}$, $b=\frac{19}{60}$

따라서

$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}\times\{f(0)+f(1)\}\times 1$

$=\frac{1}{2}\times\left(a+\frac{2a+b}{3}\right)$

$=\frac{5a+b}{6}$

$=\frac{1}{6}\times\left(\frac{35}{60}+\frac{19}{60}\right)$

$=\frac{1}{6}\times\frac{9}{10}$

$=\frac{3}{20}$

답 ③

18

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고

$\mathrm{P}(-3\le X\le 0)=\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\frac{1}{2}$

이다.

$\mathrm{P}(-1\le X\le 3)$

$=\mathrm{P}(-1\le X\le 0)+\mathrm{P}(0\le X\le 3)$

$=\mathrm{P}(-1\le X\le 0)+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

에서

$\mathrm{P}(-1\le X\le 0)=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

따라서

$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\mathrm{P}(-1\le X\le 0)=\frac{1}{8}$

답 ②

19

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(35,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-35}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(|X-35|\ge 2)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{X-35}{4}\right|\ge\frac{1}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(|Z|\ge 0.5)$

$=1-\mathrm{P}(|Z|\le 0.5)$

$=1-2\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=1-2\times 0.1915$

$=1-0.3830$

$=0.6170$

답 ⑤

20

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-24}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 27)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{27-24}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{3}{\sigma}\right)$

$=0.0668$

이므로 $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{\sigma}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{3}{\sigma}=1.5$에서 $\sigma=2$

따라서

$\mathrm{P}(X\le 26)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{26-24}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le 1)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5+0.3413$

$=0.8413$

답 ③

21

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-m}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le k)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-m}{10}\right)\\&=0.1587\\&=0.5-0.3413\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5-\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)\\&=\mathrm{P}(Z\le -1)\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{k-m}{10}=-1$에서

$k=m-10$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge k+5)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{(k+5)-m}{10}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m-10+5-m}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -0.5)\\&=0.5+\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 0)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.5+0.1915\\&=0.6915\end{aligned}$$

답 ③

22

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}F(a)+F(b)&=\mathrm{P}(X\le a)+\mathrm{P}(X\le b)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{b-m}{\sigma}\right)\\&=1\end{aligned}$$

에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(Z\le\frac{b-m}{\sigma}\right)&=1-\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-m}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

이므로 $\dfrac{b-m}{\sigma}=-\dfrac{a-m}{\sigma}$

따라서 $b=2m-a$ …… ㉠

$$\begin{aligned}F(a)-F(b)&=\mathrm{P}(X\le a)-\mathrm{P}(X\le b)\\&=\mathrm{P}(b\le X\le a)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{b-m}{\sigma}\le Z\le\frac{a-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{a-m}{\sigma}\le Z\le\frac{a-m}{\sigma}\right)\\&=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-m}{\sigma}\right)\\&=0.3830\end{aligned}$$

이므로 $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-m}{\sigma}\right)=0.1915$

즉, $\dfrac{a-m}{\sigma}=0.5$이므로

$a=m+0.5\sigma$

㉠에서 $b=2m-(m+0.5\sigma)=m-0.5\sigma$

따라서

$$\begin{aligned}F(2a-b)&=F(2(m+0.5\sigma)-(m-0.5\sigma))\\&=F(m+1.5\sigma)\\&=\mathrm{P}(X\le m+1.5\sigma)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{(m+1.5\sigma)-m}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 1.5)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5+0.4332\\&=0.9332\end{aligned}$$

답 ④

23

이 고등학교 학생 1명이 하루에 음악을 듣는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(68,\ 16^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-68}{16}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 100)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{100-68}{16}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 ①

24

이 인터넷 학습 사이트에 가입한 학생이 1주일 동안 학습한 시간이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-m}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 16)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{16-m}{4}\right)\\&=0.8413\\&=0.5+0.3413\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)+\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -1)\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{16-m}{4}=-1$에서

$m=20$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 26)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{26-20}{4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 ②

25

A라인에서 생산하는 부품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(64,\ 8^2)$을 따르고 $Z_1=\dfrac{X-64}{8}$로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
B라인에서 생산하는 부품의 무게를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(68,\ 6^2)$을 따르고 $Z_2=\dfrac{Y-68}{6}$로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
이때

$\mathrm{P}(X\le 70)=\mathrm{P}\left(Z_1\le\dfrac{70-64}{8}\right)=\mathrm{P}\left(Z_1\le\dfrac{3}{4}\right)$,

$\mathrm{P}(Y\ge k)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\dfrac{k-68}{6}\right)$

이고 $\mathrm{P}(X\le 70)=\mathrm{P}(Y\ge k)$이므로

$\dfrac{k-68}{6}=-\dfrac{3}{4}$

따라서 $k=63.5$

답 ②

26

A과수원에서 생산된 사과 중에서 임의로 선택한 사과 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, $Z_1=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\mathrm{P}(X\ge 200)=0.31$에서

$\mathrm{P}(X\ge 200)=\mathrm{P}\left(Z_1\ge\dfrac{200-m}{\sigma}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_1\le\dfrac{200-m}{\sigma}\right)$

$=0.31$

이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z_1\le\dfrac{200-m}{\sigma}\right)=0.19=\mathrm{P}(0\le Z_1\le 0.5)$

즉, $\dfrac{200-m}{\sigma}=0.5$에서

$m+0.5\sigma=200$ …… ㉠

B과수원에서 생산된 사과 중에서 임의로 선택한 사과 1개의 무게를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m-5,\ \sigma^2)$을 따르고, $Z_2=\dfrac{Y-(m-5)}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\mathrm{P}(Y\ge 200)=0.23$에서

$\mathrm{P}(Y\ge 200)=\mathrm{P}\left(Z_2\ge\dfrac{200-(m-5)}{\sigma}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z_2\le\dfrac{205-m}{\sigma}\right)=0.23$

이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z_2\le\dfrac{205-m}{\sigma}\right)=0.27=\mathrm{P}(0\le Z_2\le 0.75)$

즉, $\dfrac{205-m}{\sigma}=0.75$에서

$m+0.75\sigma=205$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=190,\ \sigma=20$

따라서

$m+\sigma=190+20=210$

답 ①

27

이 회사의 신입사원 선발시험의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(77,\ 5^2)$을 따르고 $Z=\dfrac{X-77}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
지원자가 선발시험에서 1차 합격하는 사건을 A, 지원자의 점수가 83점 이상인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(X\ge 80)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{80-77}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0.6)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)$

$=0.5-0.23$

$=0.27$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(X\ge 83)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{83-77}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1.2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)$

$=0.5-0.38$

$=0.12$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$=\dfrac{0.12}{0.27}$

$=\dfrac{4}{9}$

답 ①

28

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \dfrac{4}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\times\dfrac{4}{5}=320$,

$\mathrm{V}(X)=400\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{5}=64$

이고 시행횟수 400은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 8^2)$을 따른다.
$Z=\dfrac{X-320}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(304\le X\le 332)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{304-320}{8}\le Z\le\dfrac{332-320}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.4772+0.4332$

$=0.9104$

답 ⑤

29

승현이가 한 개의 동전을 400번 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 승현이가 받는 점수는 $20X$이다.

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\times\frac{1}{2}=200$

$\mathrm{V}(X)=400\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=100$

시행횟수 400은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(200, 10^2)$을 따르고 $Z=\frac{X-200}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서

$\mathrm{P}(20X\geq 3700)$
$=\mathrm{P}(X\geq 185)$
$=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{185-200}{10}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\geq -1.5)$
$=\mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 0)+0.5$
$=0.4332+0.5$
$=0.9332$

답 ④

30

사건 A는 주머니에서 꺼낸 공 중 흰 공이 2개인 경우와 흰 공이 3개인 경우이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{6\times 2+4}{20}=\frac{4}{5}$

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(900, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=900\times\frac{4}{5}=720$,

$\mathrm{V}(X)=900\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=144$

이고 시행횟수 900은 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(720, 12^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-720}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\sum_{k=702}^{744}\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(702\leq X\leq 744)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{702-720}{12}\leq Z\leq\frac{744-720}{12}\right)$
$=\mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 2)$
$=\mathrm{P}(-1.5\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$
$=0.4332+0.4772$
$=0.9104$

답 ⑤

31

모집단의 확률변수를 X라 하면

$\mathrm{E}(X)=12$, $\mathrm{V}(X)=4^2=16$

크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=12$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{16}{n}$

이때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$\frac{16}{n}=146-12^2=2$

따라서 $n=8$

답 ⑤

32

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+a+b=1$에서

$b=\frac{17}{24}-a$ $\cdots\cdots$ ㉠

주어진 확률분포에서

$\mathrm{E}(X)=(-3)\times\frac{1}{6}+(-1)\times\frac{1}{8}+1\times a+3\times b$
$=a+3\left(\frac{17}{24}-a\right)-\frac{5}{8}$
$=\frac{3}{2}-2a$

크기가 9인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(12\overline{X}+3)=12\mathrm{E}(\overline{X})+3=12$

에서 $\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{3}{4}$

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})$이므로 $\mathrm{E}(X)=\frac{3}{4}$

$\frac{3}{2}-2a=\frac{3}{4}$에서 $a=\frac{3}{8}$이고 ㉠에서 $b=\frac{1}{3}$

이때

$\mathrm{V}(X)=(-3)^2\times\frac{1}{6}+(-1)^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{3}-\left(\frac{3}{4}\right)^2$
$=\frac{71}{16}$

이고 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{9}=\frac{71}{144}$이므로

$\mathrm{V}(12\overline{X}+3)=12^2\mathrm{V}(\overline{X})=144\times\frac{71}{144}=71$

답 ①

33

모집단의 확률변수를 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(2, 1^2)$을 따른다.

크기가 64인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=2$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{64}}=\frac{1}{8}$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(2, \left(\frac{1}{8}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-2}{\frac{1}{8}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq k)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{k-2}{\frac{1}{8}}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\geq 8(k-2))$
$=0.1587$

이때

$P(Z\geq 1)=0.5-P(0\leq Z\leq 1)$
$=0.5-0.3413$
$=0.1587$

이므로

$8(k-2)=1$

따라서 $k=\frac{17}{8}$

답 ④

34

카페의 손님이 카페에 머무는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(52, 8^2)$을 따르므로 이 카페의 손님 중 임의추출한 16명이 카페에 머무르는 시간의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N(52, 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-52}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\geq 54)=P\left(Z\geq \frac{54-52}{2}\right)$
$=P(Z\geq 1)$
$=0.5-P(0\leq Z\leq 1)$
$=0.5-0.3413$
$=0.1587$

답 ③

35

이 공장에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(34, 4^2)$을 따른다. 이 공장에서 생산하는 초콜릿 중 임의로 선택한 4개의 평균을 $\overline{X}$라 하면 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(34, 2^2)$을 따르고 $Z=\frac{\overline{X}-34}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

초콜릿 한 상자에 담긴 4개의 초콜릿의 무게가 124 g 이하일 확률은

$P(4\overline{X}\leq 124)=P(\overline{X}\leq 31)$
$=P\left(Z\leq \frac{31-34}{2}\right)$
$=P(Z\leq -1.5)$
$=0.5-P(0\leq Z\leq 1.5)$
$=0.5-0.4332$
$=0.0668$

답 ②

36

이 제과점에서 만든 빵 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m, 10^2)$을 따른다.

이 제과점에서 만든 빵 중 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{10^2}{n}\right)$을 따르고, $Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(|\overline{X}-m|\leq 4)=P\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right|\leq \frac{4}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)$
$=P\left(|Z|\leq \frac{2}{5}\sqrt{n}\right)\geq 0.95$

이때 $P(|Z|\leq 1.96)=0.95$이므로 $\frac{2}{5}\sqrt{n}\geq 1.96$이어야 한다.

$\sqrt{n}\geq 1.96\times\frac{5}{2}=4.9$

$n\geq 4.9^2=24.01$

따라서 자연수 n의 최솟값은 25이다.

답 ③

37

모표준편차가 15인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 36인 표본의 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{15}{\sqrt{36}}\leq m\leq \overline{x}+1.96\times\frac{15}{\sqrt{36}}$

$\overline{x}-1.96\times\frac{5}{2}\leq m\leq \overline{x}+1.96\times\frac{5}{2}$

이므로

$b-a=2\times 1.96\times\frac{5}{2}=9.8$

답 ④

38

모표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\leq m\leq \overline{x}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

이때

$b-a=2\times 2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\leq 2$에서

$\sqrt{n}\geq 2.58\times 5=12.9$

$n\geq 166.41$

따라서 자연수 n의 최솟값은 167이다.

답 ④

39

모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 9인 표본의 표본평균의 값을 $\overline{x_1}$이라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{9}}\leq m\leq \overline{x_1}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{9}}$

이므로

$b-a=2\times 2.58\times\frac{\sigma}{3}$

같은 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균의 값을 $\overline{x_2}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이므로

$d-c=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$b-a\ge4.3(d-c)$에서

$2\times2.58\times\frac{\sigma}{3}\ge4.3\times2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n}\ge\frac{4.3\times1.96\times3}{2.58}=9.8$

$n\ge9.8^2=96.04$

따라서 자연수 n의 최솟값은 97이다.

답 97

실전편

실전 모의고사 1회

본문 130~137쪽

01 ⑤	02 ③	03 ①	04 ①	05 ⑤
06 ①	07 ③	08 ③	09 ②	10 ②
11 ②	12 ④	13 ④	14 ⑤	15 ③
16 8	17 29	18 4	19 14	20 9
21 383	22 31	23 ③	24 ④	25 ②
26 ①	27 ⑤	28 ②	29 244	30 94

01

$(\sqrt[3]{4})^{\log_2 27}=(\sqrt[3]{2^2})^{\log_2 3^3}=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{3\log_2 3}=2^{2\log_2 3}$

$=2^{\log_2 9}=9^{\log_2 2}=9$

답 ⑤

02

$f(x)=2x^3+4x^2-1$에서

$f'(x)=6x^2+8x$

따라서 $f'(1)=6+8=14$

답 ③

03

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이 성립해야 한다.

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} (x^2+x)=1+1=2$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} (4x+a)=4+a$

$f(1)=1+1=2$에서

$2=4+a$

따라서 $a=-2$

답 ①

04

$\tan\theta=\frac{a}{2}=-2$에서 $a=-4$

원의 반지름의 길이는 원점과 점 $(2,\ -4)$ 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 $\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$이므로

$\frac{a}{\cos\theta}=\frac{-4}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=-4\sqrt{5}$

답 ①

05

세 수 4, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=4b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

세 수 $\log_2 3$, $\log_2 a$, $\log_2(b+1)$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log_2 a=\log_2 3+\log_2(b+1)$

$\log_2 a^2=\log_2\{3(b+1)\}$

$a^2=3(b+1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $4b=3(b+1)$, $b=3$

$b=3$을 ㉠에 대입하면 $a^2=12$

$a>0$이므로 $a=2\sqrt{3}$

따라서 $ab=2\sqrt{3}\times 3=6\sqrt{3}$

답 ⑤

06

$\lim_{x\to 1-} f(x)=1$, $\lim_{x\to 2+} f(x)=1$, $f(3)=0$이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)+f(3)=1+1+0=2$

답 ①

07

$g(k)=l$이라 하면

$(f\circ g)(k)=f(g(k))=f(l)=2$에서 $1\le\sqrt{l}<2$

$1\le l<4$

그런데 l의 값은 정수이므로 $l=1$ 또는 $l=2$ 또는 $l=3$

$g(k)=1$에서 $0<\sqrt[3]{k}<1$이므로 $0<k<1$

$g(k)=2$에서 $1\le\sqrt[3]{k}<2$이므로 $1\le k<8$

$g(k)=3$에서 $2\le\sqrt[3]{k}<3$이므로 $8\le k<27$

따라서 $0<k<27$

$\alpha=0$, $\beta=27$이므로 $\alpha+\beta=0+27=27$

답 ③

08

$\int_a^x f(t)dt=x^3+2x^2-x-2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_a^a f(t)dt=a^3+2a^2-a-2=0$

$a^3+2a^2-a-2=a^2(a+2)-(a+2)$

$=(a+2)(a^2-1)$

$=(a+2)(a-1)(a+1)=0$

에서 $a>0$이므로 $a=1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+4x-1$

따라서 $a+f(1)=1+(3+4-1)=7$

답 ③

09

함수 $y=2^{x+a}$에 $x=0$을 대입하면 $y=2^a$이므로

점 A의 좌표는 $(0,\ 2^a)$

함수 $y=\log_2(x+1)-a$에 $y=0$을 대입하면 $x=2^a-1$이므로

점 B의 좌표는 $(2^a-1,\ 0)$

$\angle AOB=90°$이므로 세 점 A, B, O를 지나는 원의 지름은 선분 AB이다.

$\pi\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2=\frac{13}{4}\pi$이므로 $\overline{AB}^2=13$

$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2$

$=(2^a)^2+(2^a-1)^2=13$

$2^a=t\ (t>0)$이라 하면

$t^2+(t-1)^2=13$

$2t^2-2t-12=0,\ t^2-t-6=0$

$(t+2)(t-3)=0$

$t>0$이므로 $t=3$

따라서 $2^a=3$에서 $a=\log_2 3$

답 ②

10

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=k$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

또한 $f(x)$는 다항함수로 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$

마찬가지로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=k$에서 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이다.

그러므로 $f(x)$는 x, $x-1$을 인수로 가진다.

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\{(x-1)(ax+b)\}=-b$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\{x(ax+b)\}=a+b$

이므로 $k=-b=a+b$

이때 k는 양수이므로

$a=-2b,\ a>0,\ b<0$ ······ ㉠

$f(x-1)=(x-1)(x-1-1)(ax-a+b)$

$=(x-1)(x-2)(ax-a+b)$

$f(x)f(x-1)=x(x-1)^2(x-2)(ax+b)(ax-a+b)$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)f(x-1)}{(x-1)^2}=4$에서

$\lim_{x\to1}\{x(x-2)(ax+b)(ax-a+b)\}=-(a+b)b=4$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=4,\ b=-2,\ k=2$

따라서 $f(x)=x(x-1)(4x-2)$이므로

$f(k)=f(2)=2\times1\times6=12$

답 ②

11

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=3a_2-S_1$

$=3a_2-a_1$

$=3\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\right)=4$

(우변)$=4$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$(k+2)a_{k+1}-S_k=k+3$

$(k+2)a_{k+1}-S_k+a_{k+1}-a_{k+1}=k+3$

$(\boxed{k+3})a_{k+1}-S_{k+1}=k+3$ ······ ㉠

$a_{k+2}=a_{k+1}+\frac{1}{k+3}$에서 $a_{k+1}=a_{k+2}-\boxed{\frac{1}{k+3}}$이므로

㉠에 이 식을 대입하면

$(k+3)\left(a_{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)-S_{k+1}=k+3$

$(k+3)a_{k+2}-1-S_{k+1}=k+3$

$(k+3)a_{k+2}-S_{k+1}=\boxed{k+4}$

따라서 $n=k+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$(n+2)a_{n+1}-S_n=n+3$

이다.

이상에서 $f(k)=k+3$, $g(k)=\frac{1}{k+3}$, $h(k)=k+4$이므로

$\frac{f(12)\times g(2)}{h(2)}=\frac{15\times\frac{1}{5}}{6}=\frac{1}{2}$

답 ②

12

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 이차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 3이고, $f'(x)$가 $x=1$일 때 최솟값 -1을 가지므로

$f'(x)=3(x-1)^2-1=3x^2-6x+2$

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(3x^2-6x+2)\,dx$

$=x^3-3x^2+2x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=6$에서 $C=6$

$f(x)=x^3-3x^2+2x+6$

$f(1)=1-3+2+6=6$이므로 기울기가 -1인 접선의 방정식은

$y-6=-(x-1)$

$y=-x+7$

이 접선이 점 $(-10,\ a)$를 지나므로

$a=-(-10)+7=17$

답 ④

13

점 A의 x좌표를 a라 하면

$\overline{AB}=\log_2(a+1)-\log_4 a$

$=\log_4(a+1)^2-\log_4 a$

$=\log_4\frac{(a+1)^2}{a}$

$t>0$일 때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{(t+1)^2}{t}=\frac{t^2+2t+1}{t}=t+\frac{1}{t}+2\geq2\sqrt{t\times\frac{1}{t}}+2=4$

이때 등호는 $t=\frac{1}{t}$, 즉 $t=1$일 때 성립한다.

즉, $a>0$일 때 $\overline{\mathrm{AB}}=\log_4\frac{(a+1)^2}{a}$의 최솟값은 $a=1$일 때 1이다.

따라서 $0<a<1$일 때 $\overline{\mathrm{AB}}>1$이므로 자연수 k는 2, 3, 4, $\cdots$이고 $l=2$이다.

자연수 k ($k=2, 3, 4, \cdots$)에 대하여 두 점 A_k, D_k의 x좌표를 각각 a_k, b_k라 하면 두 점 A_k, D_k의 y좌표는 서로 같으므로

$\log_2(a_k+1)=\log_4 b_k$

$(a_k+1)^2=b_k$ $\cdots\cdots$ ㉠

선분 AB의 길이가 자연수 k일 때 점 B를 B_k라 하면

$\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}=\log_4\frac{(a_k+1)^2}{a_k}=k$에서 $\frac{(a_k+1)^2}{a_k}=4^k$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\sum_{k=l}^{l+9}\frac{\overline{\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k}}{\overline{\mathrm{C}_k\mathrm{A}_k}}=\sum_{k=2}^{11}\frac{b_k}{a_k}=\sum_{k=2}^{11}\frac{(a_k+1)^2}{a_k}$$
$$=\sum_{k=2}^{11}4^k=\frac{4^2(4^{10}-1)}{4-1}=\frac{2^{24}-16}{3}$$

답 ④

참고

$\overline{\mathrm{AB}}=\log_4\frac{(a+1)^2}{a}=k$에서 $\frac{(a+1)^2}{a}=4^k$ ($k=2, 3, 4, \cdots$)

$a^2+2a+1=4^ka$, $a^2+2(1-2^{2k-1})a+1=0$

$a=-(1-2^{2k-1})\pm\sqrt{(1-2^{2k-1})^2-1}$

$=(2^{2k-1}-1)\pm\sqrt{(2^{2k-1}-1)^2-1}$

$2^{2k-1}-1=p$라 하면 $k\geq2$이므로 $p\geq7$이다.

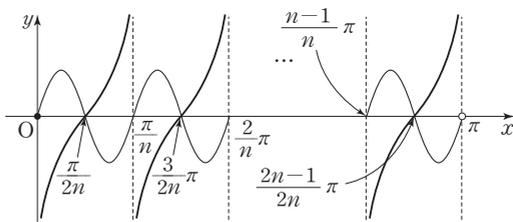
따라서 $k=2, 3, 4, \cdots$일 때, $0<a<1$을 만족시키는 $a=p-\sqrt{p^2-1}$의 값이 반드시 존재한다.

14

방정식 $\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)-\sin 2nx=0$의 실근은 두 함수 $y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$, $y=\sin 2nx$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

함수 $y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)=\tan n\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)$의 그래프는 함수 $y=\tan nx$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2n}$만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=\tan nx$의 주기는 $\frac{\pi}{n}$이다.

또한 함수 $y=\sin 2nx$의 주기는 $\frac{2\pi}{2n}=\frac{\pi}{n}$이다.

따라서 $0\leq x<\pi$에서 두 함수 $y=\tan\left(nx-\frac{\pi}{2}\right)$, $y=\sin 2nx$의 그래프는 다음과 같다.

이때 두 그래프가 만나는 점의 x좌표는

$\frac{\pi}{2n}$, $\frac{3}{2n}\pi$, $\frac{5}{2n}\pi$, $\cdots$, $\frac{2n-1}{2n}\pi$

이다. 따라서

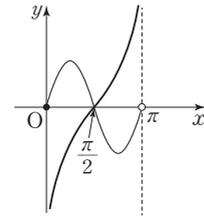
$$a_n=\frac{\pi}{2n}\{1+3+5+\cdots+(2n-1)\}$$
$$=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{\pi}{2n}\left\{2\times\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}$$
$$=\frac{\pi}{2n}\times n^2=\frac{\pi}{2}n$$

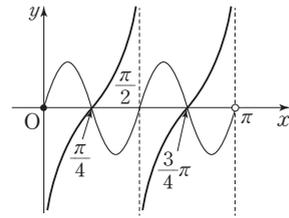
이므로

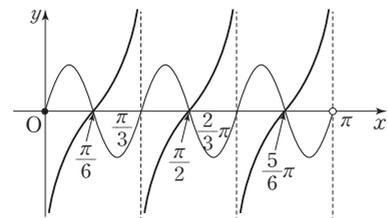
$$\sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{12}\frac{\pi}{2}k=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{12}k=\frac{\pi}{2}\times\frac{12\times13}{2}=39\pi$$

답 ⑤

참고

$n=1$일 때 두 함수 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $y=\sin 2x$의 그래프는 다음과 같다.

두 그래프의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{2}$이므로 $a_1=\frac{\pi}{2}$

$n=2$일 때 두 함수 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $y=\sin 4x$의 그래프는 다음과 같다.

두 그래프의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$이므로 $a_2=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\pi=\pi$

$n=3$일 때 두 함수 $y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=\tan 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $y=\sin 6x$의 그래프는 다음과 같다.

두 그래프의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{6}\pi$이므로

$a_3=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{5}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi$

$\vdots$

따라서 $n=k$일 때 $a_k=\frac{k}{2}\pi$

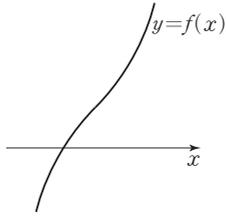
15

$f(x)=x^3-3ax+a^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$

(i) $a\le 0$일 때

$f'(x)\ge 0$에서 $f(x)$는 증가하는 함수이므로 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)$이다.

$g(a)=f(1)=1-3a+a^2+a=a^2-2a+1=(a-1)^2$

(ii) $a>0$일 때

$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$에서 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

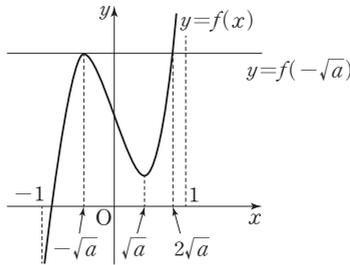
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

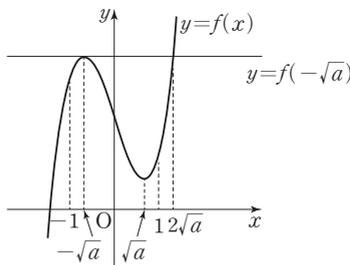
x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

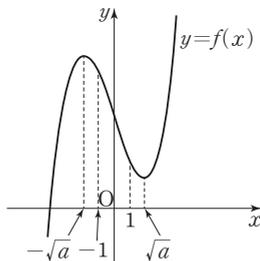
$f(-\sqrt{a})=-a\sqrt{a}+3a\sqrt{a}+a^2+a=2a\sqrt{a}+a^2+a$이고

$f(x)-f(-\sqrt{a})=x^3-3ax-2a\sqrt{a}=(x+\sqrt{a})^2(x-2\sqrt{a})$

이므로 $f(-\sqrt{a})=f(2\sqrt{a})$

(가) $0<2\sqrt{a}\le 1$, 즉 $0<a\le\frac{1}{4}$일 때

$g(a)=f(1)=a^2-2a+1=(a-1)^2$

(나) $\sqrt{a}\le 1<2\sqrt{a}$, 즉 $\frac{1}{4}<a\le 1$일 때

$g(a)=f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+a^2+a=a(\sqrt{a}+1)^2$

(다) $1<\sqrt{a}$일 때, 즉 $a>1$일 때

$g(a)=f(-1)=-1+3a+a^2+a=a^2+4a-1$

그러므로 (i), (ii)에서 $g(a)=\begin{cases}(a-1)^2 & \left(a\le\frac{1}{4}\right)\\ a(\sqrt{a}+1)^2 & \left(\frac{1}{4}<a\le 1\right)\\ a^2+4a-1 & (a>1)\end{cases}$

ㄱ. $g(2)=4+8-1=11$ (참)

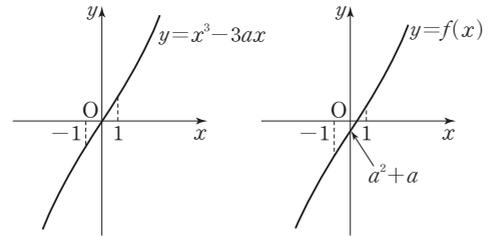
ㄴ. 함수 $g(a)$는 $a<\frac{1}{4}$일 때 감소하고 $a>\frac{1}{4}$일 때 증가하므로 $a=\frac{1}{4}$일 때 극소이면서 최소가 된다. 따라서 최솟값은

$g\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}-1\right)^2=\frac{9}{16}$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)=x^3-3ax+a^2+a$의 그래프는 함수 $y=x^3-3ax$의 그래프를 y축의 방향으로 a^2+a만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=x^3-3ax$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은

$a^2+a\ge 0$, 즉 $a\le -1$ 또는 $a\ge 0$일 때

$h(a)=g(a)$

$-1<a<0$일 때 $f(x)$는 증가하는 함수이므로

$h(a)=|f(-1)|=|a^2+4a-1|$이므로

$h(a)=\begin{cases}(a-1)^2 & (a\le -1)\\ |a^2+4a-1| & (-1<a<0)\\ (a-1)^2 & \left(0\le a\le\frac{1}{4}\right)\\ a(\sqrt{a}+1)^2 & \left(\frac{1}{4}<a\le 1\right)\\ a^2+4a-1 & (a>1)\end{cases}$

에서 $h\left(-\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{4}-2-1\right|=\frac{11}{4}$, $h(1)=1\times 4=4$

그러므로 $h\left(-\frac{1}{2}\right)+h(1)=\frac{27}{4}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

16

$\int_0^1(4x^3+6x^2+5)\,dx=\left[x^4+2x^3+5x\right]_0^1=1+2+5=8$

답 8

17

$S_{n+2}-S_n=3a_{n+1}-a_n$에서

$a_{n+2}+a_{n+1}=3a_{n+1}-a_n$

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$S_{10}=\frac{10\times(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10\times(1+a_{10})}{2}=150$

이므로 $a_{10}=29$

답 29

18

$x=2t^3-2t^2$에서 점 P의 시각 t에서의 속도 v는

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-4t$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$v=0$에서 $2t(3t-2)=0$

$t=0$ 또는 $t=\frac{2}{3}$

$0<t<\frac{2}{3}$일 때 $v<0$, $t>\frac{2}{3}$일 때 $v>0$이므로 출발 후 $t=\frac{2}{3}$일 때 운동 방향을 바꾼다.

점 P의 가속도를 a라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=12t-4$

이므로 $t=\frac{2}{3}$일 때 가속도는

$12\times\frac{2}{3}-4=8-4=4$

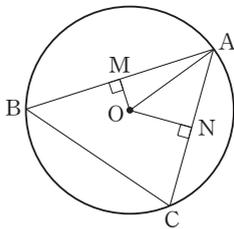
답 4

19

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에서

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$

$R=\frac{\overline{AB}}{2\sin C}=\frac{8\sqrt{2}}{2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}=6$

원의 중심 O에서 두 현 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자.

직각삼각형 OAM에서

$\overline{OM}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{6^2-(4\sqrt{2})^2}=2$

$\overline{OM}:\overline{ON}=1:2$이므로 $\overline{ON}=4$

직각삼각형 OAN에서

$\overline{AN}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{ON}^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AC}=2\overline{AN}=2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

이므로 사인법칙에서 $\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2R$

$\sin B=\frac{\overline{AC}}{2R}=\frac{4\sqrt{5}}{12}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin^2 B=\frac{5}{9}$

$p=9$, $q=5$이므로 $p+q=9+5=14$

답 14

20

삼차방정식 $x^3-px^2+(2p^2-3p)x+q+1=0$이 서로 다른 세 실근을 가지므로

$f(x)=x^3-px^2+(2p^2-3p)x+q+1$이라 하면 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지고, 함수 $f(x)$의 두 극값의 부호가 다르다.

$f'(x)=3x^2-2px+(2p^2-3p)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=p^2-3(2p^2-3p)>0$

$-5p^2+9p>0$, $p(5p-9)<0$

$0<p<\frac{9}{5}$

p는 정수이므로 $p=1$

$f(x)=x^3-x^2-x+q+1$에서

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+q+1=q+\frac{32}{27}$

$f(1)=1-1-1+q+1=q$

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지므로

$q\left(q+\frac{32}{27}\right)<0$에서 $-\frac{32}{27}<q<0$

q는 정수이므로 $q=-1$

따라서 $10p+q=10\times1-1=9$

답 9

21

$a_{18}=32$이므로 $a_{17}=16$ 또는 $a_{17}=2^{32}$이다.

그런데 $a_1=1$이므로 a_n의 정의에 의하여 $a_{17}=2^{32}$은 성립할 수 없다.

따라서 $a_{17}=16$이므로 $p\geq16$이다.

$p=16$이면 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
a_n	1	2	4	8	16	32	5	10	20	$\log_2 20$	$\cdots$

이때 $a_{10}=\log_2 20$이 되어 그 값이 무리수이므로 $a_{18}=32$가 될 수 없다.

따라서 a_{18}의 값이 $32=2^5$이 되려면 p의 최솟값 m이 2^k (k는 자연수) 꼴이 되어야 하고 우선 다음 조건을 모두 만족시켜야 한다.

(i) $m=2^k>16$

(ii) $\log_2 2m=\log_2 2^{k+1}=k+1$이므로 $a_{18}=32$가 되려면 $k+1$의 값은 2의 거듭제곱꼴이어야 한다.

(i), (ii)를 모두 만족시키는 k의 값은 7, 15, 31, 63, $\cdots$

그런데 $k=15$, 즉 $m=2^{15}$이면 $a_{17}=2^{16}$, $a_{18}=16$이므로 만족시키지 않는다.

또한 $k=31$, 63, $\cdots$이면 $a_{18}>32$이므로 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 p의 최솟값은 $k=7$일 때이므로 $m=2^7=128$이고 그때의 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	$\cdots$
a_n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	8	16	32	64	128	256	8	16	32	$\cdots$

따라서 조건을 만족시키는 p의 값의 범위는 $2^7 \le p < 2^8$이다.
자연수 p의 최댓값 $M=255$이므로
$M+m=255+128=383$

답 383

22

조건 (가)에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 0을 가지므로 $a<2$인 상수 a에 대하여
$f(x)=(x-2)^2(x-a)$
로 나타낼 수 있다.
$\{(x-2)f(x)\}'=f(x)+(x-2)f'(x)$이므로 조건 (나)에서

$$g(x)=\int \{f(x)+(x-2)f'(x)\}\,dx$$
$$=\int \{(x-2)f(x)\}'\,dx$$
$$=(x-2)f(x)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

즉, $g(x)=(x-2)^3(x-a)+C$
$=(x^3-6x^2+12x-8)(x-a)+C$

$g'(x)=(3x^2-12x+12)(x-a)+(x-2)^3$
$=3(x-2)^2(x-a)+(x-2)^3$
$=(x-2)^2\{3(x-a)+x-2\}$
$=(x-2)^2(4x-3a-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=\frac{3a+2}{4}$

$a<2$에서 $x=\frac{3a+2}{4}<2$이므로

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{3a+2}{4}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $g(x)$는 $x=\frac{3a+2}{4}$에서 극소이면서 최소이므로

조건 (다)에서

$x=\frac{3a+2}{4}=\frac{1}{2}$에서 $a=0$

$f(x)=x(x-2)^2$

$g(x)=x(x-2)^3+C$

이고

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{27}{8}\right)+C=-\frac{27}{16}+C=-\frac{3}{4}$$

에서 $C=\frac{15}{16}$

$g(x)=x(x-2)^3+\frac{15}{16}$

따라서 $f(1)+g(1)=1+\left(-1+\frac{15}{16}\right)=\frac{15}{16}$

이므로 $p=16$, $q=15$이고

$p+q=16+15=31$

답 31

23

$\mathrm{E}(X)=5$이므로
$\mathrm{E}(3X-12)=3\mathrm{E}(X)-12$
$=3\times5-12$
$=3$

답 ③

24

$\left(x^3+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r(x^3)^{5-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r 2^r x^{15-4r}$ $(r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

이때 x^3항은 $15-4r=3$일 때이므로
$r=3$
따라서 구하는 x^3의 계수는
${}_5\mathrm{C}_3\times2^3=80$

답 ④

25

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$

이때 $A^C\cup B=(A\cap B^C)^C$이므로
$\mathrm{P}(A^C\cup B)=1-\mathrm{P}(A\cap B^C)$
$=1-\{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$
$=1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)$
$=\frac{5}{12}$

답 ②

다른 풀이

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$에서
$\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A\cap B)$이므로
$\mathrm{P}(A^C\cup B)=\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A^C\cap B)$
$=\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$
$=\frac{5}{12}$

26

이 서점에 진열되어 있는 책 한 권의 두께를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3, 0.4^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-3}{0.4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(X\geq 2.6)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{2.6-3}{0.4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\geq -1)$$
$$=\mathrm{P}(-1\leq Z\leq 0)+0.5$$
$$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)+0.5$$
$$=0.3413+0.5$$
$$=0.8413$$

답 ①

27

다섯 자리 자연수에서 1이 2보다 왼쪽에 나열되어야 하므로 다음과 같이 일의 자리 ▒에 넣을 수 있는 숫자는 3 또는 5이다.

				▒

이때 1과 2를 같은 숫자 1로 생각하고 일의 자리에 나열한 숫자를 제외한 4개의 숫자를 남은 4개의 □에 일렬로 나열한 각 경우에서 오른쪽에 있는 1을 2로 다시 생각하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$\frac{4!}{2!}\times 2=24$

답 ⑤

28

사원 60명 중 임의로 선택한 사람이 남자 사원인 사건을 A, 파란색 우산을 받은 사원인 사건을 B라 하자.
여자 사원이 36명이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{60-36}{60}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{36}{60}=\frac{3}{5}$

빨간색 우산이 40개, 파란색 우산이 20개이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$

파란색 우산을 받은 남자 사원의 수를 a라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{a}{60}$이고 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{a}{60}}{\frac{1}{3}}=\frac{a}{20}=\frac{1}{2}$$

따라서 $a=10$
남자 사원과 여자 사원 중 빨간색 우산, 파란색 우산을 받은 사람의 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

성별 \ 우산	파란색 우산	빨간색 우산	합계
남자 사원	10	14	24
여자 사원	10	26	36
합계	20	40	60

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{26}{60}}{\frac{40}{60}}=\frac{26}{40}=\frac{13}{20}$$

답 ②

29

모표준편차가 8, 표본의 크기가 n, 표본평균이 $\bar{x}$일 때 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96\times\frac{8}{\sqrt{n}}\leq m\leq \bar{x}+1.96\times\frac{8}{\sqrt{n}}$

신뢰구간이 $46.88\leq m\leq 49.12$이므로

$\bar{x}-1.96\times\frac{8}{\sqrt{n}}=46.88$

$\bar{x}+1.96\times\frac{8}{\sqrt{n}}=49.12$

$\bar{x}=\frac{46.88+49.12}{2}=48$이고

$1.96\times\frac{8}{\sqrt{n}}=1.12$에서

$\sqrt{n}=14$, $n=196$

따라서 $\bar{x}+n=48+196=244$

답 244

30

선택한 4장의 카드에 적혀 있는 숫자의 가짓수로 나누어 경우의 수를 구하자.

(i) 숫자가 서로 다른 두 가지인 경우

① ○○○□ 꼴일 때, ○는 숫자 1이 적힌 카드가 되고 □는 1이 아닌 다른 숫자가 적힌 카드가 되므로 경우의 수는

$_4\mathrm{C}_1=4$

이때 1장의 카드를 새로 포함시키면 ○○○○□ 꼴 또는 ○○○□□ 꼴이 되고 이 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{3!\times 2!}=15$

따라서 이때의 경우의 수는

$4\times 15=60$

② ○○□□ 꼴일 때, ○와 □는 숫자 1, 2, 3 중 하나가 적혀 있는 두 가지의 카드가 되므로 경우의 수는

${}_3C_2=3$

이때 1장의 카드를 새로 포함시키면 ○○○□□ 꼴 또는 ○○□□□ 꼴이 되고 이 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\times2!}+\frac{5!}{2!\times3!}=20$

따라서 이때의 경우의 수는

$3\times20=60$

③ 이때 ○○○□□ 꼴에서 ○는 숫자 1이 적힌 카드가 되고 □는 숫자 2 또는 3이 적힌 카드가 되면 위의 ①에서 구한 경우와 중복된다.

즉, 11122, 11133에서 경우의 수는

$2\times\frac{5!}{3!\times2!}=20$

따라서 ①, ②, ③에서 경우의 수는

$60+60-20=100$

(ii) 숫자가 서로 다른 세 가지인 경우

○○□△ 꼴일 때, ○는 숫자 1, 2, 3 중 하나가 적혀 있는 한 가지의 카드가 되고 □와 △는 ○와 다른 숫자가 적혀 있는 카드가 되므로 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_4C_2=3\times6=18$

이때 선택한 카드에 적힌 숫자와 다른 숫자가 적힌 1장의 카드 ☆을 포함시키면 ○○□△☆ 꼴이 되므로 이 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_2C_1\times\frac{5!}{2!}=120$

1장의 카드를 포함시킨 ○○□△☆ 꼴에서 중복되는 경우가 3가지씩 생긴다.

예를 들어

11234, 11243, 11342

는 모두 같은 경우가 된다.

따라서 이때의 경우의 수는

$18\times120\times\frac{1}{3}=720$

(iii) 숫자가 서로 다른 네 가지인 경우

서로 다른 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우와 같으므로

$5!=120$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$N=100+720+120=940$

이므로

$\frac{N}{10}=94$

이다.

답 94

참고

(ii) 숫자가 서로 다른 세 가지인 경우

○○□△ 꼴일 때, 선택한 카드에 적힌 숫자와 다른 숫자가 적힌 1장의 카드 ☆을 포함시키면 ○○□△☆ 꼴이 된다.

이 5장의 카드에 적힌 숫자를 표로 나타내면 다음과 같이 12가지이다.

○	○	□	△	☆
1	1	2	3	4
			3	5
			4	5
		3	4	5
2	2	1	3	4
			3	5
			4	5
		3	4	5
3	3	1	2	4
			2	5
			4	5
		2	4	5

그러므로 ○○□△☆ 꼴일 때 5장의 카드를 일렬로 나열하는 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

이다.

따라서 이때의 경우의 수는

$12\times60=720$

이다.

실전 모의고사 2회 본문 138~145쪽

01 ④	02 ④	03 ②	04 ③	05 ③
06 ①	07 ①	08 ②	09 ②	10 ③
11 ②	12 ①	13 ⑤	14 ④	15 ⑤
16 60	17 10	18 80	19 8	20 35
21 330	22 32	23 ④	24 ①	25 ②
26 ③	27 ③	28 ④	29 23	30 323

01

$\sqrt[3]{16}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2^4}\times(2^{-1})^{\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{4}{3}}\times2^{-\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}$

$=2^1=2$

답 ④

02

$\int_{-2}^{2}(3x^2-2x+1)\,dx=2\int_{0}^{2}(3x^2+1)\,dx$

$=2\Big[x^3+x\Big]_0^2$

$=2\times(8+2)=20$

답 ④

03

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k-b_k)=3\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=3\times5-8=7$

답 ②

04

$\lim_{x\to0-}f(x)=1$, $\lim_{x\to2+}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)=1+2=3$

답 ③

05

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$, $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$이므로

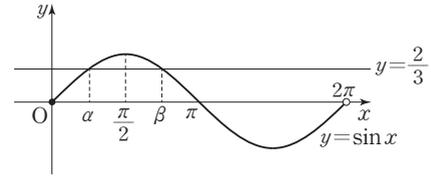
$3\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\tan x=2$에서

$3\cos x\times\frac{\sin x}{\cos x}=2$

$\sin x=\frac{2}{3}$ (단, $\cos x\neq0$)

$0\le x<2\pi$에서 $\sin x=\frac{2}{3}$의 두 실근을 α, β라 하면

$\sin(\pi-x)=\sin x$이므로

$\alpha+\beta=\pi$

답 ③

06

시각 t일 때의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 하면

$v_1(t)=f'(t)=t^2+2t+1$, $v_2(t)=g'(t)=6t-3$

$v_1(t)=v_2(t)$에서 $t^2+2t+1=6t-3$, $t^2-4t+4=0$

$(t-2)^2=0$

$t=2$

시각 t일 때의 두 점 P, Q의 가속도를 각각 $a_1(t)$, $a_2(t)$라 하면

$a_1(t)=v_1'(t)=2t+2$, $a_2(t)=v_2'(t)=6$

따라서 $t=2$일 때, 두 점 P, Q의 가속도의 합은

$a_1(2)+a_2(2)=6+6=12$

답 ①

07

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}x=\log_{2^{-1}}x=-\log_2 x$이므로

$(\log_2 x)^2+2\log_{\frac{1}{2}}x-8=0$에서

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-8=0$

$(\log_2 x-4)(\log_2 x+2)=0$

$\log_2 x=4$ 또는 $\log_2 x=-2$

$x=2^4$ 또는 $x=2^{-2}$ …… ㉡

㉡은 ㉠을 모두 만족시키므로 모든 실근의 곱은

$2^4\times2^{-2}=2^{4-2}=2^2=4$

답 ①

다른 풀이

$\log_{\frac{1}{2}}x=\frac{\log_2 x}{\log_2\frac{1}{2}}=\frac{\log_2 x}{-1}=-\log_2 x$이므로

$(\log_2 x)^2+2\log_{\frac{1}{2}}x-8=0$에서

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-8=0$ …… ㉠

$\log_2 x=t$라 하면

$t^2-2t-8=0$ …… ㉡

이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(-8)>0$

이므로 ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 ㉠도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉠의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 ㉡의 서로 다른 두 실근은

$\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=2$

$\log_2\alpha\beta=2$

$\alpha\beta=2^2=4$

따라서 모든 실근의 곱은 4이다.

08

$\lim_{h \to 0}\frac{f(2+2h)+2}{h}=1$에서 $h \to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h \to 0}\{f(2+2h)+2\}=f(2)+2=0$에서 $f(2)=-2$

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(2+2h)+2}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}\times 2=2f'(2)=1$$

이므로 $f'(2)=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}&=\lim_{x \to 2}\frac{xf(2)-xf(x)+xf(x)-2f(x)}{x-2}\\&=\lim_{x \to 2}\frac{-x\{f(x)-f(2)\}+(x-2)f(x)}{x-2}\\&=\lim_{x \to 2}\left[\frac{-x\{f(x)-f(2)\}}{x-2}+f(x)\right]\\&=\lim_{x \to 2}(-x)\times\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}+\lim_{x \to 2}f(x)\\&=-2f'(2)+f(2)\\&=-2\times\frac{1}{2}+(-2)=-3\end{aligned}$$

답 ②

09

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle CDA=180^{\circ}-\angle ABC=180^{\circ}-60^{\circ}=120^{\circ}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos 60^{\circ}$

$=19$ ...... ㉠

삼각형 ACD에서 $\overline{AD}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=2^2+x^2-2\times2\times x\times\cos 120^{\circ}$

$=4+x^2-4x\times\cos(180^{\circ}-60^{\circ})$

$=4+x^2-4x\times(-\cos 60^{\circ})$

$=4+x^2+2x$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$x^2+2x+4=19$, $x^2+2x-15=0$

$(x-3)(x+5)=0$

$x>0$이므로 $x=3$

즉, $\overline{AD}=3$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=\frac{\sqrt{19}}{\sin 60^{\circ}}=2R$$

$$R=\frac{\sqrt{19}}{2\sin 60^{\circ}}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$$

이므로 $R^2=\frac{19}{3}$

따라서 $\overline{AD}+R^2=3+\frac{19}{3}=\frac{28}{3}$

답 ②

10

세 함수 $f(x)$, $f(x)-a$, $f(x)+a$는 모두 $x=1$, $x=2$에서만 연속이 아니므로 함수 $g(x)=f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}$가 불연속인 x의 값이 오직 한 개가 되도록 하려면 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속, $x=2$에서 연속 또는 $x=1$에서 연속, $x=2$에서 불연속이어야 한다.

(i) 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속일 때

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2-}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}$

$=\lim_{x \to 2+}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}$

$=f(2)\{f(2)-a\}\{f(2)+a\}$

가 성립한다.

$\lim_{x \to 2-}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}=2\times(2-a)(2+a)$

$=2(4-a^2)$

$\lim_{x \to 2+}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}=0\times(0-a)(0+a)=0$

$f(2)\{f(2)-a\}\{f(2)+a\}=2\times(2-a)(2+a)=2(4-a^2)$

에서

$a^2-4=0$이므로 $a=-2$ 또는 $a=2$

(ii) 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1-}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}$

$=\lim_{x \to 1+}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}$

$=f(1)\{f(1)-a\}\{f(1)+a\}$

가 성립한다.

$\lim_{x \to 1-}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}=0\times(0-a)(0+a)=0$

$\lim_{x \to 1+}f(x)\{f(x)-a\}\{f(x)+a\}=-1\times(-1-a)(-1+a)$

$=a^2-1$

$f(1)\{f(1)-a\}\{f(1)+a\}=-1\times(-1-a)(-1+a)=a^2-1$

에서

$a^2-1=0$이므로 $a=-1$ 또는 $a=1$

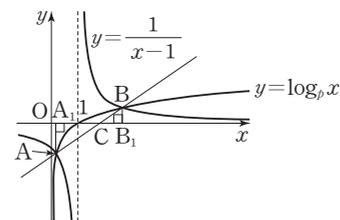
(i), (ii)에서 $a=-2$ 또는 $a=2$이면 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이고 $x=1$에서 불연속이다.

또 $a=-1$ 또는 $a=1$이면 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이고 $x=2$에서 불연속이다. 문제의 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값은 -2, -1, 1, 2의 4개이고 최댓값은 2이다.

따라서 $n=4$, $m=2$이므로

$n+m=4+2=6$

답 ③

11

두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1이라 하면 삼각형 ACA_1과 삼각형 BCB_1은 서로 닮은 도형이므로

$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=2$에서 $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}=2$이다.

즉, $\log_p a=-2\log_p b$이므로

$\log_p a=\log_p b^{-2}=\log_p \frac{1}{b^2}$에서

$a=\frac{1}{b^2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, 두 점 A, B가 곡선 $y=\frac{1}{x-1}$ 위의 점이므로

$\frac{1}{a-1}=-\frac{2}{b-1}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면

$\frac{1}{\frac{1}{b^2}-1}=-\frac{2}{b-1}$

$\frac{b^2}{1-b^2}=\frac{-2}{b-1}$

$b^2(b-1)=2(b^2-1)$

$b>1$이므로

$b^2=2(b+1)$

$b^2-2b-2=0$에서

$b=1+\sqrt{3}$

따라서

$ab=\frac{1}{b^2}\times b=\frac{1}{b}=\frac{1}{1+\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ②

12

곡선 $y=2x^2-1$과 직선 $y=ax+1$이 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha>\beta)$라 하면 α, β는 이차방정식 $2x^2-ax-2=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{a}{2}$, $\alpha\beta=-1$

점 (0, 1)을 점 C라 하면 삼각형 ABO의 넓이는 두 삼각형 ACO, CBO의 넓이의 합이므로

$S(a)=\frac{1}{2}\times1\times\alpha+\frac{1}{2}\times1\times(-\beta)$

$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

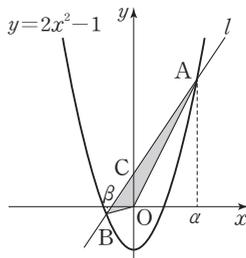
$=\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}+4}$

따라서

$\lim_{a\to\infty}\frac{S(a)}{a+1}=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}+4}}{a+1}$

$=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{a^2}}}{1+\frac{1}{a}}=\frac{1}{4}$

답 ①

13

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1^5+1^7=2$

(우변)$=\frac{1}{8}\times1^4\times(1+1)^4=\frac{1}{8}\times2^4=2$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$a_m+b_m=\frac{1}{8}m^4(m+1)^4$

이다. $n=m+1$일 때

$a_{m+1}+b_{m+1}$

$=\frac{1}{8}m^4(m+1)^4+\boxed{(m+1)^5+(m+1)^7}$

$=\frac{1}{8}(m+1)^4\{m^4+8(m+1)+8(m+1)^3\}$

$=\frac{1}{8}(m+1)^4\{m^4+(4m+4)(2m^2+4m+4)\}$

$=\frac{1}{8}(m+1)^4[m^4+(\boxed{4m+4})\{(m+2)^2+m^2\}]$

$=\frac{1}{8}(m+1)^4[m^4+\{(m+2)^2-m^2\}\{(m+2)^2+m^2\}]$

$=\frac{1}{8}(m+1)^4\{m^4+(m+2)^4-m^4\}$

$=\frac{1}{8}(m+1)^4(m+2)^4$

$=\frac{1}{8}\{\boxed{(m+1)(m+2)}\}^4$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_n+b_n=\frac{1}{8}n^4(n+1)^4$

이다.

이상에서

$f(m)=(m+1)^5+(m+1)^7$

$g(m)=4m+4$

$h(m)=(m+1)(m+2)$

이므로

$f(1)=2^5+2^7=160$

$g(3)=12+4=16$

$h(5)=6\times7=42$

따라서 $f(1)+g(3)+h(5)=160+16+42=218$

답 ⑤

14

함수 $f(x)=a\cos b\pi x$의 그래프는 주기가 $\frac{2}{b}$이다.

$f(0)=a$이므로 네 점 A, B, C, D의 좌표는

$A(0, a)$, $B\left(\frac{1}{2b}, 0\right)$, $C\left(\frac{3}{2b}, 0\right)$, $D\left(\frac{1}{b}, -a\right)$

$\overline{BD}=\overline{DC}$이고 $\angle BDC=90°$이므로 삼각형 BDC는 직각이등변삼각형이다. 이때 원점 O에 대하여 $\angle ABO=\angle DBC=\angle BAO$이므로 삼각형 AOB는 직각이등변삼각형이다.

그러므로 $a=\frac{1}{2b}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AB}=\overline{BD}$에서 두 삼각형 ABC, BDC의 넓이는 같다.
즉,
(삼각형 ADC의 넓이)
$=$(삼각형 ABC의 넓이)$+$(삼각형 BDC의 넓이)
$=2\times$(삼각형 ABC의 넓이)

$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{b}\times a$

$=\frac{a}{b}=18$

㉠에서 $\frac{1}{2b^2}=18$, $b^2=\frac{1}{36}$

$b>0$이므로 $b=\frac{1}{6}$

$b=\frac{1}{6}$을 ㉠에 대입하면 $a=3$

따라서 $a+b=3+\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$

답 ④

15

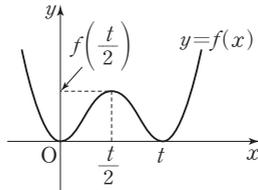
ㄱ. $f(x)=x^2(x-t)^2$에서

$$f'(x)=2x(x-t)^2+2x^2(x-t)$$
$$=2x(x-t)\{(x-t)+x\}$$
$$=2x(x-t)(2x-t)$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=t$ 또는 $x=\frac{t}{2}$

$t\neq0$일 때 $x=\frac{t}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{t}{2}$에서 극댓값을 가진다. (참)

ㄴ. $t>0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

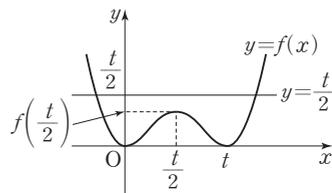
$f\left(\frac{t}{2}\right)$, $y=f(x)$, O, $\frac{t}{2}$, t, x, y

$f\left(\frac{t}{2}\right)=\left(\frac{t}{2}\right)^2\left(\frac{t}{2}-t\right)^2=\left(\frac{t}{2}\right)^4$이므로

$\left(\frac{t}{2}\right)^4=\frac{t}{2}$에서 $t=2$

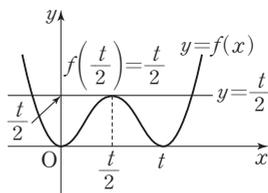
따라서

(i) $0<t<2$일 때

$\left(\frac{t}{2}\right)^4<\frac{t}{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 $g(t)=2$

(ii) $t=2$일 때

$\left(\frac{t}{2}\right)^4=\frac{t}{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$는 서로 다른 세 점에서 만나므로 $g(t)=3$

(iii) $t>2$일 때

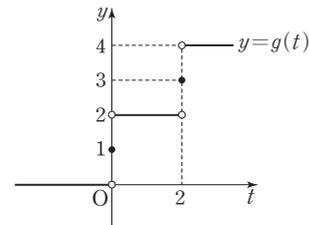
$\left(\frac{t}{2}\right)^4>\frac{t}{2}$

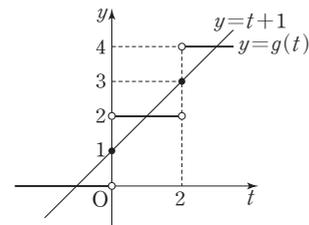
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$는 서로 다른 네 점에서 만나므로 $g(t)=4$

또한 $t=0$일 때 함수 $f(x)=x^4$의 그래프와 직선 $y=0$은 한 점에서 만나므로 $g(t)=1$이고 $t<0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{2}$는 만나지 않으므로 $g(t)=0$이다.

따라서 부등식 $\lim_{t\to a-}g(t)<\lim_{t\to a+}g(t)$를 만족시키는 모든 실수 a는 0, 2이므로 그 합은 2이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.

$y=g(t)$, 1, 2, 3, 4, O, 2, t

방정식 $t+1-g(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=t+1$, $y=g(t)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.
그림과 같이 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=t+1$은 5개의 점에서 만나므로 방정식 $t+1-g(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다. (참)

$y=t+1$, $y=g(t)$, 1, 2, 3, 4, O, 2, t

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

16

$f'(x)=2x+4$

$$g(x)=\int f'(x)\,dx+\int f(x)\,dx$$
$$=\int\{f'(x)+f(x)\}\,dx$$
$$=\int\{(2x+4)+(x^2+4x+3)\}\,dx$$
$$=\int(x^2+6x+7)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3+3x^2+7x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $g(0)=C=3$이므로

$g(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+7x+3$

따라서 $g(3)=9+27+21+3=60$

답 60

다른 풀이

$g(x)=\int f'(x)\,dx+\int f(x)\,dx$

$=f(x)+C_1+\int(x^2+4x+3)\,dx$ (단, C_1은 적분상수)

$=x^2+4x+3+C_1+\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

$=\frac{1}{3}x^3+3x^2+7x+3+C_1+C_2$

이때 $g(0)=3$이므로 $C_1+C_2=0$

따라서 $g(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+7x+3$이므로

$g(3)=9+27+21+3=60$

17

$f(x)=4^x-2^{x+2}+3$

$=2^{2x}-4\times2^x+3$

$=(2^x-2)^2-1$

$-2\le x\le2$에서 $\frac{1}{4}\le2^x\le4$이므로

함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 -1, $x=2$일 때 최댓값 3을 갖는다.

따라서 $M=3$, $m=-1$이므로

$M^2+m^2=3^2+(-1)^2=9+1=10$

답 10

18

$a_1=10$

$a_2=a_1+3=10+3=13$

$a_3=a_2+3=13+3=16$

$a_4=\log_2 a_3=\log_2 16=\log_2 2^4=4\log_2 2=4$

$a_5=\log_2 a_4=\log_2 4=\log_2 2^2=2\log_2 2=2$

$a_6=\log_2 a_5=\log_2 2=1$

$\log_2 1=0$으로 자연수가 아니므로

$a_7=a_6+3=1+3=4$

$a_8=2$

$a_9=1$

$a_{10}=4$

⋮

에서 $n\ge4$일 때 수열 $\{a_n\}$은 4, 2, 1이 반복되므로

$\sum_{k=1}^{20}a_k=10+13+16+(4+2+1)\times5+4+2$

$=39+35+6=80$

답 80

19

$S_p=T_p$이므로

$\int_0^{a_p}(x^3-px^2)\,dx=0$

이다.

$\int_0^{a_p}(x^3-px^2)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{p}{3}x^3\right]_0^{a_p}$

$=\frac{1}{4}a_p^{\,4}-\frac{p}{3}a_p^{\,3}$

$=\frac{1}{4}a_p^{\,3}\left(a_p-\frac{4}{3}p\right)$

$=0$

$a_p\ne0$이므로 $a_p=\frac{4}{3}p$

따라서

$\lim_{p\to\infty}\frac{6a_p}{p+1}=\lim_{p\to\infty}\frac{6\times\frac{4}{3}p}{p+1}$

$=\lim_{p\to\infty}\frac{8p}{p+1}$

$=8$

답 8

20

원 O의 중심을 O라 하고 점 O에서 두 선분 AB, PQ에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하고 $\overline{\mathrm{ON}}=x\ (0\le x<3)$이라 하자.

이때 0이 아닌 x의 값에 대하여 점 N은 그림과 같이 점 O의 위쪽 또는 아래쪽에 생기지만 삼각형 APQ의 넓이의 최댓값을 구하므로 점 N은 점 O의 아래쪽에 놓인다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PN}}=2\sqrt{3^2-x^2}=2\sqrt{9-x^2}$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{OM}}=\sqrt{9-(\sqrt{5})^2}=2$

$\overline{\mathrm{MN}}=\overline{\mathrm{OM}}+\overline{\mathrm{ON}}=2+x$이므로

A M B O O x P N Q

삼각형 APQ의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{9-x^2}\times(2+x)$

$=\sqrt{9-x^2}\times(2+x)$

이때

$f(x)=S^2=(9-x^2)(x^2+4x+4)$

$=-x^4-4x^3+5x^2+36x+36$

으로 놓으면

$f'(x)=-(4x^3+12x^2-10x-36)$

$=-2(2x^3+6x^2-5x-18)$

$=-2(x+2)(2x^2+2x-9)$

$f'(x)=0$에서 $0\le x<3$이므로 $x=\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$

따라서 $x=\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$에서 $f(x)$는 극대이면서 최대이다.

$S>0$이므로 S^2이 $x=\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$에서 최대이면 S도 $x=\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$에서 최대이다.

$x^2=\frac{10-\sqrt{19}}{2}$이므로 ㉠에서

$a^2=4(9-x^2)=4\left(9-\frac{10-\sqrt{19}}{2}\right)=16+2\sqrt{19}$

따라서 $m=16$, $n=19$이므로

$m+n=16+19=35$

답 35

21

$a_2=a$라 하면 조건 (가)에서 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$은 공차가 3인 등차수열이므로

$a_1+a_2=1+a$

$a_2+a_3=4+a$에서 $a_3=4$

$a_3+a_4=7+a$에서 $a_4=3+a$

$a_4+a_5=10+a$에서 $a_5=7$

$a_5+a_6=13+a$에서 $a_6=6+a$

$a_6+a_7=16+a$에서 $a_7=10$

⋮

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_{2n-1}=3n-2$ …… ㉠

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 a이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_{2n}=3n+a-3$

조건 (나)에서 $a_{20}=32$이므로

$a_{20}=30+a-3=27+a=32$에서

$a=5$이므로

$a_{2n}=3n+5-3=3n+2$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여

$$\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{10}a_{2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(3k-2)+\sum_{k=1}^{10}(3k+2)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}6k$$
$$=6\times\frac{10\times11}{2}$$
$$=330$$

답 330

다른 풀이

조건 (가)에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}+a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+3$

즉, $a_{n+2}=a_n+3$이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이고, 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 a_2이고 공차가 3인 등차수열이다.

조건 (나)에서 $a_{20}=a_2+9\times3=32$이므로 $a_2=5$이다.

이때 수열 $\{a_{2n-1}+a_{2n}\}$은 첫째항이 6, 공차가 6인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{10}(a_{2n-1}+a_{2n})$$
$$=\frac{10\times(2\times6+9\times6)}{2}$$
$$=330$$

22

함수 $g_n(x)$는 $2k-1\le x<2k$ ($k=1, 2, 3, \cdots, n$)에서 함숫값이 $f(k)$인 상숫값을 가지므로 $f'(k)=0$이면 함수 $g_n(x)$는 $x=2k-1$, $x=2k$에서 미분가능하고 $f'(k)\neq0$이면 함수 $g_n(x)$는 $x=2k-1$, $x=2k$에서 미분가능하지 않다.

만약 모든 자연수 k에 대하여 $f'(k)\neq0$이면

$a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=6$, $\cdots$, $a_n=2n$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 자연수 p의 최솟값은 1이 되어 모순이다.

조건 (가)에서 $b_1=a_6=l$ (l은 짝수인 자연수)라 하면

$b_2=a_7=l+2$, $b_3=a_8=l+4$, $b_4=a_9=l+6$, $\cdots$이므로

$f'(6)=0$ …… ㉠

이고, 7 이상인 자연수 k에 대하여 $f'(k)\neq0$이다.

$x<11$일 때 $g_6(x)=g_5(x)$이고

$11\le x<12$일 때 $g_6(x)=f(6)$, $g_5(x)=f(x-5)$이고

$x\ge12$일 때 $g_6(x)=g_5(x-1)$이므로

조건 (나)에서

$$\int_0^{12}g_6(x)\,dx-\int_0^{11}g_5(x)\,dx=\int_{11}^{12}g_6(x)\,dx$$
$$=\int_{11}^{12}f(6)\,dx=0$$

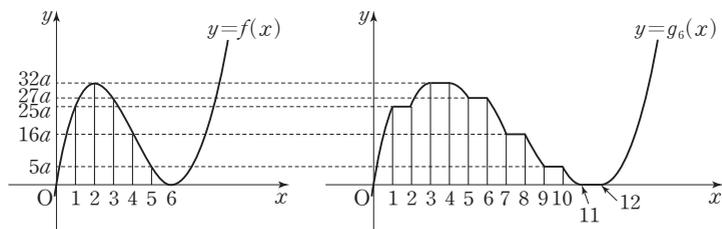
따라서 $f(6)=0$ …… ㉡

$f(0)=0$이고 ㉠, ㉡에 의하여

$f(x)=ax(x-6)^2$ (a는 0이 아닌 상수)

로 놓을 수 있다.

$f'(x)=a\{(x-6)^2+2x(x-6)\}=3a(x-2)(x-6)$

따라서 $a>0$일 때, 함수 $y=f(x)$와 함수 $y=g_6(x)$의 그래프는 다음과 같다.

$\displaystyle\int_6^{14}f(x)dx=\int_{12}^{20}g_6(x)\,dx$이므로

조건 (다)에서

$$\int_0^{20}g_6(x)\,dx-\int_0^{14}f(x)\,dx$$
$$=\int_0^{12}g_6(x)\,dx+\int_{12}^{20}g_6(x)\,dx-\left(\int_0^{6}f(x)\,dx+\int_6^{14}f(x)\,dx\right)$$
$$=\int_0^{12}g_6(x)\,dx-\int_0^{6}f(x)\,dx$$
$$=\int_1^{2}g_6(x)\,dx+\int_3^{4}g_6(x)\,dx+\int_5^{6}g_6(x)\,dx+\int_7^{8}g_6(x)\,dx$$
$$+\int_9^{10}g_6(x)\,dx+\int_{11}^{12}g_6(x)\,dx$$
$$=25a+32a+27a+16a+5a+0$$
$$=105a=21$$

$a=\dfrac{1}{5}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{5}x(x-6)^2$이므로

$f(10)=\dfrac{1}{5}\times10\times(10-6)^2=32$

답 32

참고

$a<0$일 때, $\displaystyle\int_6^{14}f(x)\,dx=\int_{12}^{20}g_6(x)\,dx$이고

$\displaystyle\int_0^{20}g_6(x)\,dx-\int_0^{14}f(x)\,dx<0$이므로

조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

23

확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+a=1$

따라서 $a=\frac{1}{2}$이고

$\mathrm{E}(X)=-2\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

답 ④

24

$\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}\left(\frac{a}{x^2}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r a^r x^{6-3r}$ $(r=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

이때 x^3항은 $6-3r=3$에서 $r=1$일 때이고, x^3의 계수가 12이므로

${}_6\mathrm{C}_1 a^1=6a=12$

에서 $a=2$

답 ①

25

(i) 만의 자리에 1이 오는 경우

[1][ ][ ][ ][■]에서 [■]에는 2 또는 4를 넣고 남은 3개의 [ ]에는 만의 자리와 일의 자리에 넣은 숫자를 제외하고 남은 서로 다른 세 숫자를 넣는 경우의 수는

$3!\times 2=12$

(ii) 만의 자리에 2가 오는 경우

[2][ ][ ][ ][■]에서 [■]에는 4를 넣고 남은 3개의 [ ]에는 만의 자리와 일의 자리에 넣은 숫자를 제외하고 남은 세 수 1, 1, 3을 넣는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

(i), (ii)에서 30000보다 작은 짝수인 자연수의 개수는

$12+3=15$

답 ②

26

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B^C)&=1-\mathrm{P}(B)\\&=1-\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 ③

27

정규분포 $\mathrm{N}(60, 10^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 25인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60, \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(60, 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-60}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(58\le\overline{X}\le 63)&=\mathrm{P}\left(\frac{58-60}{2}\le Z\le\frac{63-60}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.3413+0.4332\\&=0.7745\end{aligned}$$

답 ③

28

A지역에서 생산되는 감자 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(150, 5^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-150}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 142)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{142-150}{5}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{8}{5}\right)\end{aligned}$$

B지역에서 생산되는 감자 1개의 무게를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(156, 10^2)$을 따른다.

$Z=\frac{Y-156}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y\le k)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-156}{10}\right)$

$\mathrm{P}(X\ge 142)=\mathrm{P}(Y\le k)$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{8}{5}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-156}{10}\right)$

이므로

$\frac{k-156}{10}=\frac{8}{5}$

따라서 $k=172$

답 ④

29

조건 (가), (나)에 의하여

$16=2\times 8=4\times 4$이므로

$f(2)=2$, $f(3)=8$ 또는 $f(2)=f(3)=4$

(i) $f(2)=2$, $f(3)=8$일 때

정의역 X의 원소 1은 공역 Y의 원소 2에 대응시키고 정의역 X의 원소 4, 5는 공역 Y의 원소 8, 10 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 대응시키면 되므로

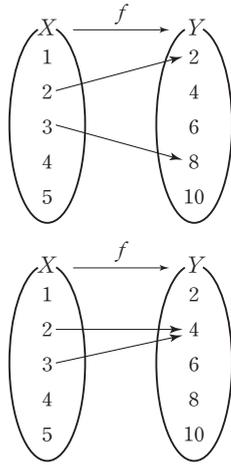
${}_2\mathrm{H}_2={}_{2+2-1}\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

(ii) $f(2)=f(3)=4$일 때

정의역 X의 원소 1은 공역 Y의 원소 2 또는 4에 대응시키고 정의역 X의 원소 4, 5는 공역 Y의 원소 4, 6, 8, 10 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 대응시키면 되므로

$2\times{}_4\mathrm{H}_2=2\times{}_{4+2-1}\mathrm{C}_2=2\times{}_5\mathrm{C}_2=20$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3+20=23$

답 23

30

k번째 가위바위보에서 점 P를 이동시킬 때 좌표의 변화를 a_k라 하면

$a_k=\frac{1}{2^k}$ 또는 $a_k=-\frac{1}{2^k}$ 또는 $a_k=0$이고 각각의 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

$x_k=a_1+a_2+\cdots+a_k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

이다. 이때

$-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}\le a_3+a_4+a_5\le\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}$

에서

$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}=\frac{4+2+1}{32}=\frac{7}{32}$

이므로

$-\frac{7}{32}\le a_3+a_4+a_5\le\frac{7}{32}$ …… ㉠

㉠에서 $x_2\ge\frac{1}{2}$이면

$x_5=x_2+(a_3+a_4+a_5)\ge\frac{1}{2}-\frac{7}{32}=\frac{9}{32}>\frac{1}{4}$

이므로 a_3, a_4, a_5의 값에 관계없이 $x_5>\frac{1}{4}$이다.

또 $x_2\le0$이면

$x_5=x_2+(a_3+a_4+a_5)\le0+\frac{7}{32}<\frac{1}{4}$

이므로 a_3, a_4, a_5의 값에 관계없이 $x_5<\frac{1}{4}$이다.

따라서 $x_5>\frac{1}{4}$일 확률을 $x_2\ge\frac{1}{2}$인 경우와 $0<x_2<\frac{1}{2}$인 경우로 나누어 구할 수 있다.

(i) $x_2\ge\frac{1}{2}$인 경우

$a_1=\frac{1}{2}$이고 $a_2=\frac{1}{4}$인 경우와 $a_1=\frac{1}{2}$이고 $a_2=0$인 경우이므로 그 확률은

$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$

(ii) $0<x_2<\frac{1}{2}$인 경우

$a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=-\frac{1}{4}$인 경우와 $a_1=0$, $a_2=\frac{1}{4}$인 경우이므로 그 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

이때 $x_2=\frac{1}{4}$이므로 $a_3+a_4+a_5>0$이어야 한다.

$\frac{1}{2^3}>\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}$이므로 가능한 경우는

$a_3=\frac{1}{2^3}$인 경우 a_4, a_5의 값에 관계없이 $x_5>\frac{1}{4}$이고

그 확률은 $\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$

$a_3=0$, $a_4=\frac{1}{2^4}$인 경우 a_5의 값에 관계없이 $x_5>\frac{1}{4}$이고

그 확률은 $\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{81}$

$a_3=0$, $a_4=0$, $a_5=\frac{1}{2^5}$인 경우 $x_5>\frac{1}{4}$이고

그 확률은 $\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{243}$

따라서 $0<x_2<\frac{1}{2}$인 경우 $x_5>\frac{1}{4}$일 확률은

$\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+\frac{2}{243}=\frac{26}{243}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{2}{9}+\frac{26}{243}=\frac{80}{243}$

따라서 $p=243$, $q=80$이므로

$p+q=243+80=323$

답 323

실전 모의고사 3회 본문 146~153쪽

01 ②	02 ⑤	03 ④	04 ⑤	05 ②
06 ①	07 ②	08 ③	09 ③	10 ②
11 ②	12 ④	13 ③	14 ⑤	15 ③
16 11	17 7	18 9	19 12	20 68
21 11	22 550	23 ③	24 ②	25 ②
26 ①	27 ⑤	28 ②	29 11	30 334

01

$\sqrt[5]{16}\times\sqrt[10]{8}=\sqrt[5]{2^4}\times\sqrt[10]{2^3}=2^{\frac{4}{5}}\times2^{\frac{3}{10}}=2^{\frac{8}{10}+\frac{3}{10}}=2^{\frac{11}{10}}$

답 ②

02

$$\int_0^1 x^3(a-x^2)\,dx=\int_0^1(ax^3-x^5)\,dx$$
$$=\left[\frac{a}{4}x^4-\frac{1}{6}x^6\right]_0^1$$
$$=\frac{a}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3a-2}{12}$$

즉, $\frac{3a-2}{12}=\frac{5}{12}$에서

$3a-2=5$, $3a=7$

따라서 $a=\frac{7}{3}$

답 ⑤

03

함수 $y=4^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y=4^{x+1}$

이 그래프가 점 $(1, a)$를 지나므로

$a=4^2=16$

답 ④

04

$\lim_{x\to-1+}f(x)=3$이고 $\lim_{x\to1-}f(x)=4$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=3+4=7$

답 ⑤

05

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta-\sin\theta$$
$$=-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=-\frac{7}{5}$$

답 ②

06

$F(x)=(x+1)f(x)-4x^3-6x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)-12x^2-12x$

$(x+1)f'(x)=12x^2+12x=12x(x+1)$

$x\neq-1$일 때 $f'(x)=12x$이고 $f(x)$가 다항함수이므로 $f'(x)$도 다항함수이다.

따라서 $f'(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to-1}f'(x)=f'(-1)$이므로

$f'(-1)=\lim_{x\to-1}f'(x)=\lim_{x\to-1}12x=-12$

답 ①

07

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-1$이므로 $f'(1)=3$이고 곡선 $y=f(x)$는 점 $(1, 2)$를 지난다.

즉, $f(1)=2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x+1$이므로 $g'(1)=2$이고 곡선 $y=g(x)$는 점 $(1, 3)$을 지난다.

즉, $g(1)=3$

한편, 곡선 $y=f(x)g(x)+1$ 위의 점 중에서 x좌표가 1인 점의 y좌표는

$f(1)g(1)+1=2\times3+1=7$이고

$h(x)=f(x)g(x)+1$이라 하면

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

곡선 $y=f(x)g(x)+1$ 위의 점 $(1, 7)$에서의 접선의 기울기는

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=3\times3+2\times2=13$

구하는 접선의 방정식은 $y-7=13(x-1)$, 즉

$y=13x-6$

따라서 $a-b=13-(-6)=19$

답 ②

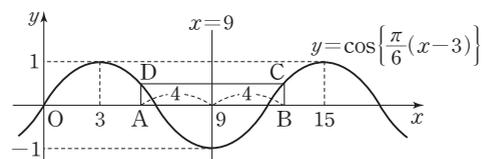
08

함수 $y=\cos\left\{\frac{\pi}{6}(x-3)\right\}$의 그래프는 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$이고

$y=\cos\frac{\pi}{6}x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이다.

$x=3$일 때 $y=1$이고 주기가 12이므로 $x=9$일 때 $y=-1$, $x=15$일 때 $y=1$이다. 따라서 두 점 A, B는 직선 $x=9$에 대하여 대칭이다.

$\overline{AB}=8$에서 점 A와 점 B의 좌표는 각각 A$(5, 0)$, B$(13, 0)$이고

$x=5$일 때 $y=\cos\frac{2\pi}{6}=\frac{1}{2}$이므로 점 D의 좌표는 D$\left(5, \frac{1}{2}\right)$이다.

따라서 직사각형 ABCD의 넓이 S는

$S=8\times\frac{1}{2}=4$

답 ③

09

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)$는 $x=b$에서 연속이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to b-}\{(x-2)^2+a\}=\lim_{x\to b+}2x=f(b)$

$\lim_{x\to b-}\{(x-2)^2+a\}=(b-2)^2+a$

$\lim_{x\to b+}2x=2b$

$f(b)=2b$

그러므로 $(b-2)^2+a=2b$, 즉 $b^2-6b+a+4=0$에서

$a=-b^2+6b-4$

$\quad=-(b-3)^2+5$

따라서 실수 a의 최댓값은 5이다.

답 ③

10

함수 $y=a^{x+1}+b$의 그래프는 함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이고 감소하는 함수이므로

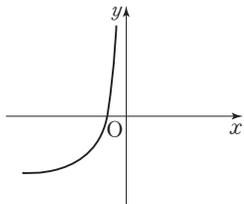
$0<a<1$

또 함수 $y=a^{x+1}+b$의 그래프가 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=a^0+b=1+b$에서 $b=-1$

이 값을 $y=\log_a(bx)$에 대입하면 $y=\log_a(-x)$이고

이 그래프는 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다. 이때 함수 $y=\log_a x$의 그래프는 $0<a<1$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값이 감소하는 그래프이다.

따라서 함수 $y=\log_a(bx)$의 그래프의 개형은 오른쪽과 같다.

답 ②

11

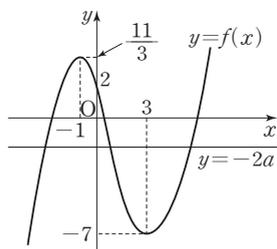
$g(x)=f(x)+2a$이므로 방정식 $g(x)=0$의 근은 방정식 $f(x)=-2a$의 근과 같다.

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$

에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{11}{3}$	↘	-7	↗

$f(0)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

이때 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가지려면 $-7<-2a<2$이어야 한다. 즉,

$-1<a<\frac{7}{2}$

따라서 만족시키는 정수 a의 값은 0, 1, 2, 3이므로 그 개수는 4이다.

답 ②

12

$\{f(x)-2ax+a^2\}^2$

$=a^4+4a^2x^2+\{f(x)\}^2-4a^3x-4axf(x)+2a^2f(x)$

$=a^4-4xa^3+\{4x^2+2f(x)\}a^2-4xf(x)a+\{f(x)\}^2$

이므로

$\int_0^1\{f(x)-2ax+a^2\}^2dx$

$=a^4\int_0^1 1\,dx-a^3\int_0^1 4x\,dx+a^2\int_0^1\{4x^2+2f(x)\}\,dx$

$\qquad -4a\int_0^1 xf(x)\,dx+\int_0^1\{f(x)\}^2dx$

$=a^4-2a^3+\left\{\frac{4}{3}+2\times\left(-\frac{5}{3}\right)\right\}a^2-4a\times 0+\int_0^1\{f(x)\}^2dx$

$=a^4-2a^3-2a^2+\int_0^1\{f(x)\}^2dx \quad \cdots\cdots ㉠$

$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=k$ (k는 상수)라 하고 ㉠을 $g(a)$로 놓으면

$g'(a)=4a^3-6a^2-4a=2a(2a+1)(a-2)$

$g'(a)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

$g(a)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$ 중에서 최솟값을 가진다.

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+k=-\frac{3}{16}+k$

$g(2)=16-16-8+k=-8+k$

이므로 $g(a)$는 $a=2$에서 최솟값을 가진다.

답 ④

13

2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_n=S_n-S_{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$

이므로 $S_n-S_{n-1}=\frac{3S_n^2}{3S_n+1}$, 즉

$(S_n-S_{n-1})(3S_n+1)=3S_n^2$, $3S_n^2+S_n-3S_nS_{n-1}-S_{n-1}=3S_n^2$

$(1-3S_{n-1})S_n=S_{n-1}$

$S_n=\frac{S_{n-1}}{1-3S_{n-1}}$, $\frac{1}{S_n}=\frac{1-3S_{n-1}}{S_{n-1}}$

이므로 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_{n-1}}+\boxed{-3}$, $\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}=1$이다.

이때 수열 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$은 첫째항이 1, 공차가 $\boxed{-3}$인 등차수열이다. 즉,

$\frac{1}{S_n}=-3n+4$, $S_n=\boxed{\frac{1}{4-3n}}$

이다. ㉠에서

$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge 2)$

$\quad=\frac{1}{4-3n}-\frac{1}{7-3n}=\boxed{\frac{3}{(4-3n)(7-3n)}}$

따라서 $a_n=\begin{cases} 1 & (n=1) \\ \boxed{\dfrac{3}{(4-3n)(7-3n)}} & (n\geq 2) \end{cases}$

그러므로

$k=-3,\ f(n)=\dfrac{1}{4-3n},\ g(n)=\dfrac{3}{(4-3n)(7-3n)}$

이다.

따라서 $kf(3)g(3)=-3\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{50}$

답 ③

14

ㄱ. t초 후의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$x_1(0)=x_2(0)=0$이므로

$x_1(t)=\int_0^t v_1(t)\,dt=\int_0^t (4t^2-6at-a^2)\,dt$

$=\dfrac{4}{3}t^3-3at^2-a^2t$

$x_2(t)=\int_0^t v_2(t)\,dt=\int_0^t (t^2+6at-10a^2)\,dt$

$=\dfrac{1}{3}t^3+3at^2-10a^2t$

따라서

$f(t)=|x_1(t)-x_2(t)|$

$=\left|\dfrac{4}{3}t^3-3at^2-a^2t-\dfrac{1}{3}t^3-3at^2+10a^2t\right|$

$=|t^3-6at^2+9a^2t|=|t|(t-3a)^2$

$=t(t-3a)^2$ (참)

ㄴ. $a=2$일 때, $f(t)=t(t-6)^2$이므로

$f'(t)=(t-6)^2+2t(t-6)=(t-6)(t-6+2t)$

$=3(t-2)(t-6)$

따라서 $y=f(t)$는 $t=2$에서 극댓값을 가지고 $t=6$에서 극솟값을 가지므로 $0\leq t\leq 3$에서 $y=f(t)$는 $t=2$에서 극대이면서 최댓값을 가진다.

따라서 최댓값은 $f(2)=2\times(-4)^2=32$ (참)

ㄷ. $0\leq t\leq 3$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 a의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

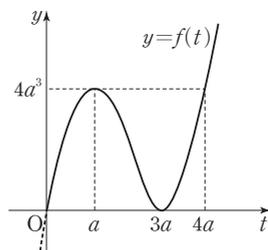
(i) $a>0$일 때

$f'(t)=(t-3a)^2+t\times 2(t-3a)=(t-3a)(t-3a+2t)$

$=3(t-3a)(t-a)$

이므로 $y=f(t)$는 $t=a$에서 극댓값을 가지고, $t=3a$에서 극솟값을 가진다.

$f(0)=f(3a)=0$이고, $f(a)=f(4a)=4a^3$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.

y
y=f(t)
4a³
O a 3a 4a t

㉠ $4a<3$ 또는 $a>3$, 즉 $0<a<\dfrac{3}{4}$ 또는 $a>3$인 경우

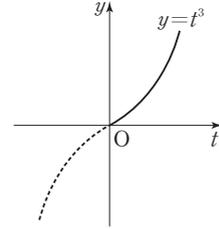
$0\leq t\leq 3$에서 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f(3)=27(a-1)^2$

㉡ $a\leq 3\leq 4a$, 즉 $\dfrac{3}{4}\leq a\leq 3$인 경우

$0\leq t\leq 3$에서 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f(a)=4a^3$

(ii) $a=0$일 때

$f(t)=t^3$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.

y
y=t³
O t

$0\leq t\leq 3$에서 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f(3)=3^3=27$

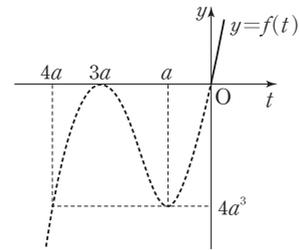
(iii) $a<0$일 때

$f'(t)=(t-3a)^2+t\times 2(t-3a)=(t-3a)(t-3a+2t)$

$=3(t-3a)(t-a)$

이므로 $y=f(t)$는 $t=a$에서 극솟값을 가지고, $t=3a$에서 극댓값을 가진다.

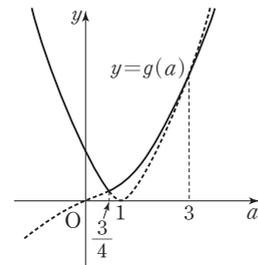
$f(0)=f(3a)=0$이고, $f(a)=f(4a)=4a^3$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.

y
y=f(t)
4a 3a a
O t
4a³

$0\leq t\leq 3$에서 함수 $f(t)$의 최댓값은 $f(3)=27(a-1)^2$

(i), (ii), (iii)에서

$g(a)=\begin{cases} 27(a-1)^2 & \left(a<\dfrac{3}{4},\ a>3\right) \\ 4a^3 & \left(\dfrac{3}{4}\leq a\leq 3\right) \end{cases}$

이므로 함수 $y=g(a)$의 그래프는 그림과 같다.

y
y=g(a)
O 1 3 a
3/4

따라서 $g(a)$는 $a=\dfrac{3}{4}$일 때, 최솟값 $g\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{27}{16}$을 가진다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15

$\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$이라 하면 $S_n=\begin{cases} n^2-2n+2 & (n\leq 20) \\ 3n & (n\geq 21) \end{cases}$ …… ㉠

$n\le 20$일 때 $S_n=n^2-2n+2$이므로

$2\le n\le 20$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-2n+2)-\{(n-1)^2-2(n-1)+2\}=2n-3$

$n=1$일 때, ㉠에서 $a_1=S_1=1$

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 2n-3 & (2\le n\le 20)\end{cases} \quad \cdots\cdots ㉡$$

$n=21$일 때, ㉠에서 $S_{21}=3\times 21=63$이므로

$a_{21}=S_{21}-S_{20}=63-(20^2-2\times 20+2)=-299$ ...... ㉢

$n\ge 22$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=3n-3(n-1)=3$ ...... ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 $a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 2n-3 & (2\le n\le 20)\\ -299 & (n=21)\\ 3 & (n\ge 22)\end{cases}$

$\sum_{k=1}^{6} a_{3k-2}$에서

(i) $k=1$일 때

$a_1=1$

(ii) $2\le k\le 6$일 때

$a_k=2k-3$에서

$\sum_{k=2}^{6} a_{3k-2}=-1+\sum_{k=2}^{6} a_{3k-2}-(-1)=\sum_{k=1}^{6}(6k-7)-(-1)$

$=6\sum_{k=1}^{6}k-7\times 6-(-1)$

$=6\times\left(\frac{6\times 7}{2}\right)-42-(-1)=85$

$\sum_{k=7}^{15} ka_{3k}$에서

(iii) $k=7$일 때

$7a_{21}=7\times(-299)=-2093$

(iv) $8\le k\le 15$일 때

$a_k=3$이므로

$\sum_{k=8}^{15} ka_{3k}=\sum_{k=8}^{15}(k\times 3)=3\sum_{k=8}^{15}k$

$=3\left(\sum_{k=1}^{15}k-\sum_{k=1}^{7}k\right)=3\left(\frac{15\times 16}{2}-\frac{7\times 8}{2}\right)=276$

(i)~(iv)에서

$\sum_{k=1}^{6} a_{3k-2}+\sum_{k=7}^{15} ka_{3k}=1+85+(-2093)+276=-1731$

답 ③

16

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=5$ ...... ㉠

$a_7+a_8=(a+6d)+(a+7d)=2a+13d=37$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $d=3$

따라서 $a_n=(-1)+(n-1)\times 3=3n-4$

$a_n<30$에서 $3n-4<30$, $n<\frac{34}{3}$

따라서 모든 자연수 n은 1, 2, 3, ⋯, 11이고 그 개수는 11이다.

답 11

17

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}$의 극한값이 존재하고 $x\to 2$일 때,

(분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

$f(2)-2=0$, 즉 $f(2)=2$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-3}{2x-4}$의 극한값이 존재하고 $x\to 2$일 때,

(분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

$g(2)-3=0$, 즉 $g(2)=3$

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-3}{2x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-3}{2(x-2)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-3}{x-2}$

$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\frac{1}{2}g'(2)$

그러므로 $f'(2)=\frac{1}{2}g'(2)$, 즉 $g'(2)=2f'(2)$

함수 $h(x)=f(x)g(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$에서

$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

$=3f'(2)+2g'(2)=3f'(2)+4f'(2)=7f'(2)$

이므로 $\frac{h'(2)}{f'(2)}=7$

따라서 $a=7$

답 7

18

$4^{2x}>\sqrt[n]{8}\times 4^x$에서

$2^{4x}>8^{\frac{1}{n}}\times 2^{2x}$, $2^{4x}>2^{\frac{3}{n}}\times 2^{2x}$, $2^{4x}>2^{2x+\frac{3}{n}}$

밑이 1보다 크므로

$4x>2x+\frac{3}{n}$, $2x>\frac{3}{n}$, $x>\frac{3}{2n}$

따라서 $\frac{3}{2n}=\frac{1}{6}$이므로 $n=9$

답 9

19

함수 $f(x)+ax$의 도함수 $f'(x)+a$에 대하여

$f'(x)+a=(x+2)(x-5)+a=x^2-3x-10+a$

$f(x)+ax$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖기 위해서는

이차방정식 $f'(x)+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

이차방정식 $x^2-3x-10+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4(-10+a)=49-4a>0$에서 $a<\frac{49}{4}$

따라서 자연수 a의 최댓값은 12이다.

답 12

20

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n=ar^{n-1}$이므로

$b_n=a_{2n-1}+a_{2n+1}=ar^{2n-1-1}+ar^{2n+1-1}=ar^{2n-2}+ar^{2n}$

$=a(r^2)^{n-1}+a(r^2)^{n-1}\times r^2=(a+ar^2)(r^2)^{n-1}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $a+ar^2$이고 공비가 r^2인 등비수열이다.
수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제3항까지의 합이 21이므로

$$\frac{(a+ar^2)\{(r^2)^3-1\}}{r^2-1}=21 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$c_n=a_{4n-3}+a_{4n-1}=ar^{4n-3-1}+ar^{4n-1-1}=ar^{4n-4}+ar^{4n-2}$$
$$=a(r^4)^{n-1}+a(r^4)^{n-1}\times r^2$$
$$=(a+ar^2)(r^4)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 $a+ar^2$이고 공비가 r^4인 등비수열이다.
수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제2항까지의 합이 17이므로

$$\frac{(a+ar^2)\{(r^4)^2-1\}}{r^4-1}=17 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서

$$\frac{(a+ar^2)\{(r^2)^3-1\}}{r^2-1}=\frac{(a+ar^2)(r^2-1)(r^4+r^2+1)}{r^2-1}$$
$$=(a+ar^2)(r^4+r^2+1)=21$$

따라서 $a+ar^2=\frac{21}{r^4+r^2+1}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서

$$\frac{(a+ar^2)\{(r^4)^2-1\}}{r^4-1}=\frac{(a+ar^2)(r^4-1)(r^4+1)}{r^4-1}$$
$$=(a+ar^2)(r^4+1)=17$$

따라서 $a+ar^2=\frac{17}{r^4+1}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서

$$\frac{21}{r^4+r^2+1}=\frac{17}{r^4+1},\ 21(r^4+1)=17(r^4+r^2+1)$$

$4r^4-17r^2+4=0$, $(4r^2-1)(r^2-4)=0$

$r>1$이므로 $r^2=4$이고 $a=\frac{1}{5}$이다.

$$a_3+a_7=ar^2+ar^6=\frac{1}{5}\times4+\frac{1}{5}\times4^3=\frac{4}{5}+\frac{64}{5}=\frac{68}{5}$$

따라서 $k=\frac{68}{5}$이므로 $5k=68$

답 68

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n=ar^{n-1}$이므로
$b_n=a_{2n-1}+a_{2n+1}$에서 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제3항까지의 합은
$(a_1+a_3)+(a_3+a_5)+(a_5+a_7)=a_1+2a_3+2a_5+a_7$
따라서 $a_1+2a_3+2a_5+a_7=21$ $\cdots\cdots$ ㉠
$c_n=a_{4n-3}+a_{4n-1}$에서 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제2항까지의 합은
$(a_1+a_3)+(a_5+a_7)$
따라서 $a_1+a_3+a_5+a_7=17$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠－㉡을 하면 $a_3+a_5=4$
따라서 $a_1+a_7=13$

$ar^2+ar^4=4$에서 $a=\frac{4}{r^2+r^4}$ $\cdots\cdots$ ㉢

$a+ar^6=13$에서 $a=\frac{13}{1+r^6}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서

$$\frac{4}{r^2+r^4}=\frac{13}{1+r^6},\ 4(r^2)^3-13(r^2)^2-13r^2+4=0$$

$(r^2-4)\{4(r^2)^2+3r^2-1\}=0$

$(r^2-4)(4r^2-1)(r^2+1)=0$

$r^2+1>0$이고 $r>1$이므로 $r^2=4$이고 $a=\frac{1}{5}$

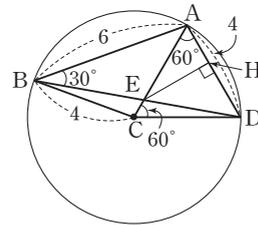
$$a_3+a_7=ar^2+ar^6=\frac{1}{5}\times4+\frac{1}{5}\times4^3=\frac{4}{5}+\frac{64}{5}=\frac{68}{5}$$

따라서 $k=\frac{68}{5}$이므로 $5k=68$

21

삼각형 ABD에서 $\angle ABE=30°$이고 정삼각형 ACD에서 $\angle ACD=60°$이므로 원주각과 중심각의 관계에 의하여 점 C는 삼각형 ABD의 외접원의 중심이다.
그러므로 $\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{AD}=4$이고 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin 30°}=\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ADB)},\ \frac{4}{\frac{1}{2}}=\frac{6}{\sin(\angle ADB)}$$

$$\sin(\angle ADB)=6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$\overline{AE}=k\ (k>0)$이라 하고 꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 AEH에서 $\overline{AH}=k\cos 60°=\frac{k}{2}$

$\overline{DH}=\overline{AD}-\overline{AH}=4-\frac{k}{2}$

$\sin(\angle ADE)=\frac{3}{4}$이므로

$$\cos(\angle ADE)=\sqrt{1-\sin^2(\angle ADE)}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan(\angle ADE)=\frac{\sin(\angle ADE)}{\cos(\angle ADE)}=\frac{3}{\sqrt{7}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 직각삼각형 EHA에서

$$\overline{EH}=\sin 60°\times\overline{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}k$$

직각삼각형 EDH에서

$$\tan(\angle EDH)=\frac{\overline{EH}}{\overline{DH}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}k}{4-\frac{k}{2}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\angle ADE=\angle EDH$이므로 ㉠과 ㉡에서

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}k}{4-\frac{k}{2}}=\frac{3}{\sqrt{7}},\ 즉\ k=\frac{24}{\sqrt{21}+3}=2(\sqrt{21}-3)=\overline{AE}$$

삼각형 AED의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
삼각형 AED에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AE}}{\sin(\angle ADE)}=2R에서\ \frac{2(\sqrt{21}-3)}{\frac{3}{4}}=2R$$

따라서 $2R=\frac{8(\sqrt{21}-3)}{3}$에서 $p=3$, $q=8$이므로

$p+q=11$

답 11

22

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접하고,

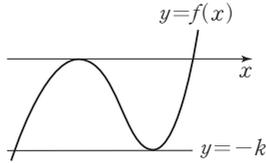
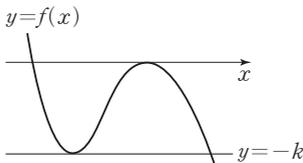
조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=-k$에 접한다.

따라서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 2가지 경우이다.

① 최고차항의 계수가 양수인 경우

$y=f(x)$, x, $y=-k$

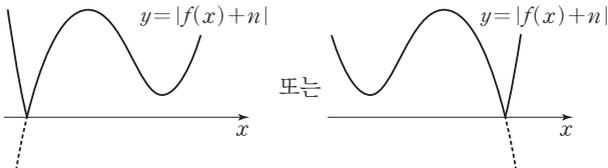
② 최고차항의 계수가 음수인 경우

$y=f(x)$, x, $y=-k$

①, ②에서 삼차함수 $y=f(x)$의 극댓값은 0이고, 극솟값은 $-k$이다.

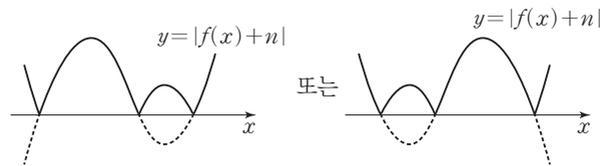
따라서 함수 $y=f(x)+n$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프이므로 함수 $y=f(x)+n$의 극댓값은 n, 극솟값은 $n-k$이다.

(i) $n-k\geq 0$일 때, 즉 $n\geq k$

함수 $|f(x)+n|$의 극댓값은 n이다.

$y=|f(x)+n|$, x 또는 $y=|f(x)+n|$, x

(ii) $n-k<0$일 때, 즉 $n<k$

함수 $|f(x)+n|$의 극댓값은 n, $-n+k$이다.

$y=|f(x)+n|$, x 또는 $y=|f(x)+n|$, x

(i), (ii)에서

$n=1$일 때, $S_1=\{1,\ -1+k\}$

$n=2$일 때, $S_2=\{2,\ -2+k\}$

$n=6$일 때, 조건 (나)에 의하여 $S_6=\{6\}$

이므로

$S_1\cup S_2\cup S_6=\{1,\ -1+k,\ 2,\ -2+k,\ 6\}$

이때 $S_1\cup S_2\cup S_6$의 모든 원소의 합이 $2k+6$이므로

$2k+6=17$, $k=\frac{11}{2}$

따라서 $100k=550$

답 550

23

확률변수 X가 이항분포 $B(80,\ p)$를 따르므로

$E(X)=80\times p=60$

에서

$p=\frac{60}{80}=\frac{3}{4}$

따라서 $V(X)=80\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=15$

답 ③

24

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

$$\begin{aligned}P(A\cap B^C)&=P(A)P(B^C)\\&=\frac{1}{2}P(B^C)\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$P(B^C)=\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}P(B)&=1-P(B^C)\\&=1-\frac{2}{3}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

답 ②

25

$(x+1)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_r x^r 1^{6-r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$ …… ㉠

$(1+ax)(x+1)^6$의 전개식에서 x^4항이 나오는 경우는 다음과 같다.

(i) $(1+ax)$의 상수항과 ㉠의 x^4항을 곱한 경우

$(1+ax)$의 상수항은 1이고 ㉠의 x^4항의 계수는 $r=4$일 때이므로

${}_6C_4=15$

따라서 x^4의 계수는

$1\times 15=15$

(ii) $(1+ax)$의 x항과 ㉠의 x^3항을 곱한 경우

$(1+ax)$의 x항의 계수는 a이고 ㉠의 x^3항의 계수는 $r=3$일 때이므로

${}_6C_3=20$

따라서 x^4의 계수는

$a\times 20=20a$

(i), (ii)에 의하여 $(1+ax)(x+1)^6$의 전개식에서 x^4항의 계수는

$15+20a$이다.
x^4의 계수가 55이므로
$15+20a=55$에서
$a=2$

답 ②

26

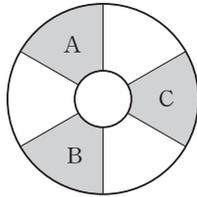
확률변수 X가 정규분포 $N(m,\ 6^2)$을 따르고
$P(X\le 8)=P(X\ge 16)$이 성립하므로
$m=\frac{8+16}{2}=12$
$Z=\frac{X-12}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(9\le X\le 18)&=P\left(\frac{9-12}{6}\le Z\le \frac{18-12}{6}\right)\\&=P(-0.5\le Z\le 1)\\&=P(-0.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)\\&=P(0\le Z\le 0.5)+P(0\le Z\le 1)\\&=0.1915+0.3413\\&=0.5328\end{aligned}$$

답 ①

27

서로 다른 6가지 색을 한 번씩 모두 사용하여 한 영역에 한 가지 색만 칠하는 경우의 수는
$(6-1)!=5!=120$
이때 빨간색, 파란색, 노란색이 모두 서로 이웃하지 않도록 칠하려면 그림과 같이 먼저 빨간색, 파란색, 노란색을 A, B, C 영역에 칠하고 남은 세 가지 색을 칠하면 되므로 그 경우의 수는
$(3-1)!\times 3!=12$

A
C
B

따라서 구하는 경우의 수는
$120-12=108$

답 ⑤

28

이 과수원에서 생산하는 복숭아 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(302,\ 16^2)$을 따른다. 한 상자에 담긴 복숭아 1개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N(302,\ 4^2)$을 따르고,
$Z=\frac{\overline{X}-302}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 한 상자에 담긴 복숭아의 무게의 합이 4960 g 이상일 확률은

$$\begin{aligned}P(16\overline{X}\ge 4960)&=P(\overline{X}\ge 310)\\&=P\left(Z\ge \frac{310-302}{4}\right)\\&=P(Z\ge 2)\\&=0.5-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

답 ②

29

주머니 A에서 흰 공 1개를 꺼내는 사건을 X, 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼내는 사건을 Y라 하자.

$$\begin{aligned}P(X\cap Y)&=P(X)P(Y|X)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{6}{45}\\&=\frac{1}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X^C\cap Y)&=P(X^C)P(Y|X^C)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{10}{45}\\&=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}P(Y)&=P(X\cap Y)+P(X^C\cap Y)\\&=\frac{1}{15}+\frac{1}{9}\\&=\frac{8}{45}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X|Y)&=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}\\&=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{8}{45}}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

따라서 $p=8,\ q=3$이므로
$p+q=8+3=11$

답 11

30

11에서 20까지 자연수 중에서 일의 자리의 수를 3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2가 되는 수들의 집합을 각각 P_0, P_1, P_2라 하면
$P_0=\{13,\ 16,\ 19,\ 20\}$
$P_1=\{11,\ 14,\ 17\}$
$P_2=\{12,\ 15,\ 18\}$
이때 시행을 세 번 반복한 결과로 얻은 세 수 a, b, c에 대하여 일의 자리의 수의 합이 3으로 나누어떨어지는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 모두 집합 P_0에서 중복을 허락하여 하나씩 택하는 경우의 수는

$_4\Pi_3=4^3=64$

(ⅱ) 모두 집합 P_1에서 중복을 허락하여 하나씩 택하는 경우의 수는

$_3\Pi_3=3^3=27$

(ⅲ) 모두 집합 P_2에서 중복을 허락하여 하나씩 택하는 경우의 수는

$_3\Pi_3=3^3=27$

(ⅳ) 집합 P_0, P_1, P_2에서 각각 하나씩 택하는 경우의 수는

$3!\times(4\times3\times3)=216$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$64+27+27+216=334$

답 334

실전 모의고사 4회 본문 154~161쪽

01 ④	02 ③	03 ②	04 ③	05 ①
06 ④	07 ③	08 ②	09 ③	10 ③
11 ②	12 ③	13 ②	14 ⑤	15 ③
16 10	17 7	18 33	19 7	20 612
21 25	22 120	23 ②	24 ③	25 ①
26 ④	27 ⑤	28 ①	29 112	30 585

01

$$\sqrt[8]{3^7}\times\sqrt{3^{\frac{9}{4}}}=3^{\frac{7}{8}}\times\left(3^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=3^{\frac{7}{8}}\times3^{\frac{9}{8}}$$
$$=3^{\frac{7}{8}+\frac{9}{8}}$$
$$=3^2=9$$

답 ④

02

$$\int_0^1(4x^3-3ax^2+4)\,dx=\Big[x^4-ax^3+4x\Big]_0^1$$
$$=1-a+4$$
$$=5-a=2$$

따라서 $a=3$

답 ③

03

$$y=\log_2\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$
$$=\log_2\left\{\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right\}$$
$$=\log_2\left(x+\frac{1}{4}\right)+\log_2\sqrt{2}$$
$$=\log_2\left(x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}$$

함수 $y=\log_2\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=-\frac{1}{4}$, $n=\frac{1}{2}$이므로

$m+n=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

답 ②

04

$\lim_{x\to1+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to-1-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to-1-}f(x)=-1+1=0$

답 ③

05

$\dfrac{1}{3-\tan\theta}=3+2\sqrt{2}$에서

$3-\tan\theta=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=3-2\sqrt{2}$

따라서 $\tan\theta=2\sqrt{2}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=2\sqrt{2}$이므로

$\sin\theta=2\sqrt{2}\cos\theta$ …… ㉠

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 ㉠을 대입하면

$8\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$9\cos^2\theta=1$, $\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

㉠에서 $\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서

$$\sin\theta+\cos\theta=\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$$

답 ①

06

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f'(x)\,dx=f'(x)$이고

$f'(x)=3x^2+2ax$이므로

$$\begin{aligned}f(2)-f(1)&=\int_1^2 f'(x)\,dx\\&=\int_1^2(3x^2+2ax)\,dx\\&=\Big[x^3+ax^2\Big]_1^2\\&=(8+4a)-(1+a)\\&=3a+7=19\end{aligned}$$

따라서 $a=4$

답 ④

07

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$이다.

$\displaystyle\lim_{x\to a-}(2x+b)=\lim_{x\to a+}(2x^2-3b)=2a+b$

$2a+b=2a^2-3b$, $4b=2a^2-2a$

따라서 $b=\dfrac{1}{2}a(a-1)$

이때 a, b가 10 이하의 자연수이므로

$a=2$일 때, $b=1$

$a=3$일 때, $b=3$

$a=4$일 때, $b=6$

$a=5$일 때, $b=10$

따라서 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(3, 3)$, $(4, 6)$, $(5, 10)$의 4개이다.

답 ③

08

$8\sin\left\{\dfrac{\pi}{6}(x+7)\right\}=4\sqrt{3}$에서

$\sin\left\{\dfrac{\pi}{6}(x+7)\right\}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ …… ㉠

$\theta=\dfrac{\pi}{6}(x+7)$이라 하면

$0\le x\le 12$에서 $7\le x+7\le 19$

$\dfrac{7}{6}\pi\le\dfrac{\pi}{6}(x+7)\le\dfrac{19}{6}\pi$이므로

$\dfrac{7}{6}\pi\le\theta\le\dfrac{19}{6}\pi$

㉠에서 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta=\dfrac{7}{3}\pi$ 또는 $\theta=\dfrac{8}{3}\pi$

그러므로

$\dfrac{\pi}{6}(x+7)=\dfrac{7}{3}\pi$에서 $x=7$

$\dfrac{\pi}{6}(x+7)=\dfrac{8}{3}\pi$에서 $x=9$

따라서 $x=7$ 또는 $x=9$이므로 만나는 두 점의 x좌표의 합은

$7+9=16$

답 ②

09

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 하면 a, b는

방정식 $f(x)=-x+4$의 두 근이므로 0이 아닌 상수 m에 대하여

$f(x)-(-x+4)=m(x-a)(x-b)$ $(m<0)$으로 놓을 수 있다.

따라서 $f(x)=m(x-a)(x-b)-x+4$

$f'(x)=m(x-b)+m(x-a)-1$

점 A에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 기울기가 3이므로

$f'(a)=m(a-b)-1=3$

$m(a-b)=4$

따라서 점 B에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 기울기는

$f'(b)=m(b-a)-1=-4-1=-5$

답 ③

10

$(\log 5)^2+(\log 2)^2=(\log 5+\log 2)^2-2\log 5\times\log 2=1-2a$

$$\begin{aligned}(\log 5-\log 2)^2&=(\log 5)^2+(\log 2)^2-2\log 5\times\log 2\\&=1-2a-2a=1-4a\end{aligned}$$

이므로 $\log 5-\log 2=\sqrt{1-4a}$

$(\log 25)^4-(\log 4)^4$

$=(2\log 5)^4-(2\log 2)^4$

$=16\{(\log 5)^4-(\log 2)^4\}$

$=16\{(\log 5)^2+(\log 2)^2\}\{(\log 5)^2-(\log 2)^2\}$

$=16\{(\log 5)^2+(\log 2)^2\}(\log 5+\log 2)(\log 5-\log 2)$

$=16(1-2a)\sqrt{1-4a}$

따라서 $p=16$, $q=4$이므로

$p+q=16+4=20$

답 ③

11

조건 (나)에서 $a_{n+3}-a_{n+1}=b_{n+3}-b_{n+1}$이므로

$a_{n+1}-b_{n+1}=a_{n+3}-b_{n+3}$

따라서

$a_2-b_2=a_4-b_4=a_6-b_6=a_8-b_8=\cdots=a_{2n}-b_{2n}=\alpha$라 하고

$a_3-b_3=a_5-b_5=a_7-b_7=a_9-b_9=\cdots=a_{2n+1}-b_{2n+1}=\beta$라 하면

$\sum_{k=1}^{8}(a_{k+1}-b_{k+1})=(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+\cdots+(a_9-b_9)=48$에서

$4(\alpha+\beta)=48$, $\alpha+\beta=12$

조건 (나)에서 $a_{n+3}-a_{n+1}=b_{n+2}-b_n$이므로

$a_{n+3}-b_{n+2}=a_{n+1}-b_n$

그런데 조건 (가)에서 $a_3-b_2=3-6=-3$이므로

$a_{2n+3}-b_{2n+2}=a_{2n+1}-b_{2n}=-3$

따라서 $a_{2n+1}-b_{2n}=-3$이고 $\alpha+\beta=12$이므로

$a_{2n}-b_{2n}+a_{2n+1}-b_{2n+1}=12$에서

$a_{2n}-b_{2n+1}=15$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8}(a_{2k}-b_{2k+1})&=(a_2-b_3)+(a_4-b_5)+(a_6-b_7)+\cdots+(a_{16}-b_{17})\\&=15+15+\cdots+15\\&=15\times 8=120\end{aligned}$$

답 ②

12

수직선 위의 좌표가 1인 점 A를 출발한 점 P의

1초 후의 위치는 $1+1\times 2=3$

2초 후의 위치는 $3+\frac{1}{2}\times 1\times 2=4$

4초 후의 위치는 $4-\frac{1}{2}\times 2\times 1=3$

6초 후의 위치는 $3-\frac{1}{2}\times 2\times 1=2$

7초 후의 위치는 $2+\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{5}{2}$

8초 후의 위치는 $\frac{5}{2}+1\times 1=\frac{7}{2}$

이므로 $\frac{15}{2}$초 후의 위치는 $\frac{5}{2}+1\times\frac{1}{2}=3$

$t=\frac{15}{2}$일 때 점 P는 수직선 위의 좌표가 3인 점 B를 세 번째 지난다.

그러므로 $t=\frac{15}{2}$일 때까지 점 P가 실제로 움직인 거리는

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{15}{2}}|v(t)|\,dt\\&=1\times 2+\frac{1}{2}\times 1\times 2+\frac{1}{2}\times 2\times 1+\frac{1}{2}\times 2\times 1+\frac{1}{2}\times 1\times 1+\frac{1}{2}\times 1\\&=2+1+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\&=6\end{aligned}$$

답 ③

13

$a_1=1$이고, $3S_n=(n+2)a_n$에서

$n=2$일 때 $3(a_1+a_2)=(2+2)a_2$이므로 $a_2=3$이다.

즉, $\begin{cases}p+q=1\\4p+2q=3\end{cases}$ 이므로 연립방정식을 풀면

$p=\boxed{\frac{1}{2}}$, $q=\boxed{\frac{1}{2}}$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=\boxed{\frac{1}{2}}\times n^2+\boxed{\frac{1}{2}}\times n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ……(＊)

이다.

(i) $n=1$일 때, $a_1=\boxed{\frac{1}{2}}\times 1^2+\boxed{\frac{1}{2}}\times 1=1$이므로 (＊)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (＊)이 성립한다고 가정하면

$a_m=\boxed{\frac{1}{2}}\times m^2+\boxed{\frac{1}{2}}\times m=\frac{1}{2}m(m+1)$

한편, $3S_n=(n+2)a_n$에서 $3S_{m+1}=(m+3)a_{m+1}$이므로

$3a_{m+1}=(m+3)a_{m+1}-(m+2)a_m$, $ma_{m+1}=(m+2)a_m$

$$\begin{aligned}a_{m+1}&=\boxed{\frac{m+2}{m}}\times a_m=\frac{m+2}{m}\times\frac{1}{2}m(m+1)\\&=\frac{1}{2}\times\boxed{(m+1)(m+2)}\\&=\frac{1}{2}(m+1)^2+\frac{1}{2}(m+1)\end{aligned}$$

이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 (＊)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (＊)이 성립한다.

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$이고

$f(m)=\frac{m+2}{m}$, $g(m)=(m+1)(m+2)$

이므로 $\alpha+\beta=1$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=4$에서

$f(\alpha+\beta)+g\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=f(1)+g(4)=3+30=33$

답 ②

14

조건 (가)와 (나)에서 $0<h<5$인 임의의 h에 대하여

$\int_{4-h}^{4}f'(x)\,dx\times\int_{4}^{4+h}f'(x)\,dx<0$이므로

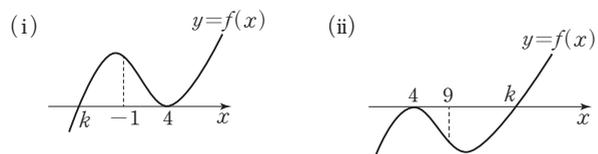
$\int_{4-h}^{4}f'(x)\,dx>0$이고 $\int_{4}^{4+h}f'(x)\,dx<0$ 또는

$\int_{4-h}^{4}f'(x)\,dx<0$이고 $\int_{4}^{4+h}f'(x)\,dx>0$이어야 한다.

그러므로 $f'(x)$의 부호가 $x=4$의 좌우에서 바뀌고 $f'(4)=0$이다.

즉, $f(4)=f'(4)=0$이므로 삼차함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

(i) $y=f(x)$ — k, -1, 4, x

(ii) $y=f(x)$ — 4, 9, k, x

$f(x)=(x-4)^2(x-k)$ $(k\neq4)$라 하면

$f'(x)=2(x-4)(x-k)+(x-4)^2$

$=(x-4)\{2(x-k)+(x-4)\}$

$=(x-4)\{3x-(2k+4)\}=0$

에서 $x=4$ 또는 $x=\frac{2k+4}{3}$

방정식 $f'(x)=0$의 두 근의 차는 5 이상이므로

$\left|4-\frac{2k+4}{3}\right|\geq5$ …… ㉠

(ⅰ)의 경우

㉠에서 $4-\frac{2k+4}{3}\geq5$, $k\leq-\frac{7}{2}$

그러므로 방정식 $f(x)=(x-4)^2(x-k)=0$의 두 근의 차를 d_1이라 하면

$d_1\geq4-\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{15}{2}$

(ⅱ)의 경우

㉠에서 $\frac{2k+4}{3}-4\geq5$, $k\geq\frac{23}{2}$

그러므로 방정식 $f(x)=(x-4)^2(x-k)=0$의 두 근의 차를 d_2라 하면

$d_2\geq\frac{23}{2}-4=\frac{15}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)로부터 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 차의 최솟값은 $\frac{15}{2}$

답 ⑤

15

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수이고, $a\neq0$)으로 놓으면

조건 (가)에서 $f(0)=1$이므로 $d=1$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

조건 (나)에서

$f'(0)=-3$, $c=-3$

$f'(1)=-3$, $3a+2b+c=-3$

$c=-3$이므로 $3a+2b=0$

따라서 $b=-\frac{3}{2}a$ …… ㉠

조건 (다)에서 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 가지므로 α, β는 방정식 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}$이고, ㉠에서 $b=-\frac{3}{2}a$이므로 $\alpha+\beta=1$

$\alpha\beta=\frac{c}{3a}$이고, $c=-3$이므로 $\alpha\beta=-\frac{1}{a}$

또

$|f(\alpha)-f(\beta)|=\left|a(\alpha^3-\beta^3)-\frac{3}{2}a(\alpha^2-\beta^2)-3(\alpha-\beta)\right|$

$=|\alpha-\beta|\left|a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{3}{2}a(\alpha+\beta)-3\right|$

이고, 조건 (다)에서 $|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta|$이므로

$|\alpha-\beta|\left|a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{3}{2}a(\alpha+\beta)-3\right|=|\alpha-\beta|$

$\left|a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{3}{2}a(\alpha+\beta)-3\right|=1$

$\left|a\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}-\frac{3}{2}a(\alpha+\beta)-3\right|=1$ …… ㉡

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-\frac{1}{a}$을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\left|a\left(1+\frac{1}{a}\right)-\frac{3}{2}a-3\right|=1$, $\left|-\frac{1}{2}a-2\right|=1$

$|a+4|=2$

에서 $a=-2$ 또는 $a=-6$ …… ㉢

한편, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가지므로 $D>0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=b^2-3ac=\left(-\frac{3}{2}a\right)^2+9a$

$=\frac{9}{4}a(a+4)>0$

따라서 $a<-4$ 또는 $a>0$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $a=-6$이고, ㉠에서 $b=9$

따라서 $f(x)=-6x^3+9x^2-3x+1$이므로

$f(2)=-48+36-6+1=-17$

답 ③

다른 풀이

조건 (나)에서 $f'(0)=f'(1)=-3$이므로

$f'(x)=kx(x-1)-3=kx^2-kx-3$ $(k\neq0)$으로 놓을 수 있다.

이때 $f(x)=\frac{k}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2-3x+C$ (단, C는 적분상수)

조건 (가)에서 $f(0)=1$이므로 $f(0)=C=1$

따라서 $f(x)=\frac{k}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2-3x+1$

조건 (다)에서 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 가지므로 α, β는 방정식 $f'(x)=kx^2-kx-3=0$의 서로 다른 두 실근이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-\frac{3}{k}$ …… ㉠

한편,

$|f(\alpha)-f(\beta)|=\left|\frac{k}{3}(\alpha^3-\beta^3)-\frac{k}{2}(\alpha^2-\beta^2)-3(\alpha-\beta)\right|$

$=|\alpha-\beta|\left|\frac{k}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{k}{2}(\alpha+\beta)-3\right|$

이고, 조건 (다)에서 $|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta|$이므로

$|\alpha-\beta|\left|\frac{k}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{k}{2}(\alpha+\beta)-3\right|=|\alpha-\beta|$

$\left|\frac{k}{3}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\frac{k}{2}(\alpha+\beta)-3\right|=1$

$\left|\frac{k}{3}\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}-\frac{k}{2}(\alpha+\beta)-3\right|=1$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$\left|\frac{k}{3}\left(1+\frac{3}{k}\right)-\frac{k}{2}-3\right|=1$, $\left|-\frac{k}{6}-2\right|=1$

$|k+12|=6$

이므로 $k=-6$ 또는 $k=-18$ …… ㉢

한편, 이차방정식 $f'(x)=kx^2-kx-3=0$의 판별식을 D라 하면

$f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 가지므로 $D>0$이어야 한다.

$D=(-k)^2+12k=k^2+12k$

$=k(k+12)>0$

이므로 $k>0$ 또는 $k<-12$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $k=-18$이므로

$f(x)=-6x^3+9x^2-3x+1$

따라서 $f(2)=-48+36-6+1=-17$

16

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{12}-a_6=(a+11d)-(a+5d)$

$=6d=30$

이므로 $d=5$

따라서 $a_{20}-a_{18}=2d=2\times5=10$

답 10

17

$g(x)=(-2x^3+1)f(x)$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$g(-1)=(2+1)\times f(-1)=3f(-1)$

$g(-1)=9$이므로 $f(-1)=3$

$g(x)=(-2x^3+1)f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=-6x^2f(x)+(-2x^3+1)f'(x)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$g'(-1)=(-6)\times f(-1)+3f'(-1)$

$3=(-6)\times3+3f'(-1)$, $3f'(-1)=21$

따라서 $f'(-1)=7$

답 7

18

$(g\circ g)(a)=g(g(a))=4$에서

$g(a)=s$라 하면

$g(s)=4$이므로 $f(4)=s$

$4<8$이므로 $s=4\times4=16$

$g(a)=16$에서 $f(16)=a$

$16\geq8$이므로

$a=f(16)=\log_2 16+29=33$

답 33

19

사각형 OABC의 넓이는 삼각형 OAB와 삼각형 OBC의 넓이의 합이다. 삼각형 OAB에 대하여 사각형 OABC의 넓이가 최대가 될 때는 삼각형 OBC의 넓이가 최대가 될 때이며 [그림 1]과 같이 점 C에서의 접선의 기울기가 직선 OB의 기울기와 서로 같을 때이다.

점 B의 좌표를 $B(t, 3t-t^2)$으로 놓으면 직선 OB의 기울기는

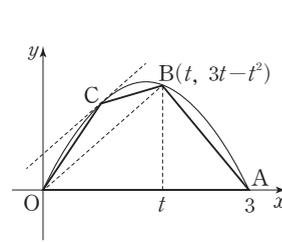
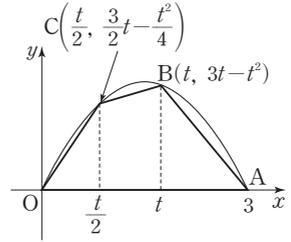
$\frac{3t-t^2}{t}=3-t$이고

$y=3x-x^2$에서 $y'=3-2x$이므로

구하는 점 C의 x좌표는

$3-2x=3-t$에서

$x=\frac{t}{2}$

따라서 점 C의 좌표는 $C\left(\frac{t}{2}, \frac{3}{2}t-\frac{t^2}{4}\right)$이다.

[그림 1]

[그림 2]

이때 사각형 OABC의 넓이를 $S(t)$ $(0<t<3)$이라 하면

$S(t)$는 [그림 2]에서와 같이

(삼각형의 넓이)+(사다리꼴의 넓이)+(삼각형의 넓이)이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\times\left(\frac{3}{2}t-\frac{t^2}{4}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\times\left(\frac{3}{2}t-\frac{t^2}{4}+3t-t^2\right)+\frac{1}{2}\times(3-t)\times(3t-t^2)$$

$$=\frac{6t^2-t^3}{16}+\frac{18t^2-5t^3}{16}+\frac{9t-6t^2+t^3}{2}$$

$$=\frac{2t^3-24t^2+72t}{16}$$

$$=\frac{1}{8}(t^3-12t^2+36t)$$

$S'(t)=\frac{1}{8}(3t^2-24t+36)=\frac{3}{8}(t-2)(t-6)$

$S'(t)=0$에서 $0<t<3$이므로 $t=2$

$0<t<3$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 $t=2$일 때, $S(t)$는 극대이면서 최대이다.

이때 두 점 B와 C의 좌표는 각각 $B(2, 2)$, $C(1, 2)$이므로

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2+2+1+2=7$

답 7

20

함수 $y=\frac{n}{x}$의 그래프와 직선 $y=k^2x$의 교점의 x좌표는

$\frac{n}{x}=k^2x$ 에서 $x^2=\frac{n}{k^2}$

$x=-\frac{\sqrt{n}}{k}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{n}}{k}$

또한 함수 $y=\frac{n}{x}$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{k^2}$의 교점의 x좌표는

$\frac{n}{x}=\frac{x}{k^2}$에서 $x^2=nk^2$

$x=-\sqrt{n}k$ 또는 $x=\sqrt{n}k$

한편, $\sqrt{n}k-\frac{\sqrt{n}}{k}=\frac{\sqrt{n}}{k}-\left(-\frac{\sqrt{n}}{k}\right)$에서

$\sqrt{n}k=\frac{3\sqrt{n}}{k}$, 즉 $k^2=3$, $k=\sqrt{3}$

그러므로 네 수 d, b, a, c는 각각 $-\sqrt{3n}$, $-\sqrt{\frac{n}{3}}$, $\sqrt{\frac{n}{3}}$, $\sqrt{3n}$이다.

네 수 $-\sqrt{3n}$, $-\sqrt{\frac{n}{3}}$, $\sqrt{\frac{n}{3}}$, $\sqrt{3n}$의 공차는

$\sqrt{3n}-\sqrt{\frac{n}{3}}=\frac{2\sqrt{3n}}{3}$이고 공차는 16 이하의 자연수이므로

$1\le\frac{2\sqrt{3n}}{3}\le16$에서

$n=3m^2$ ($m=1, 2, 3, \cdots, 8$)

따라서 모든 n의 값의 합은

$$3(1^2+2^2+3^2+\cdots+8^2)=3\sum_{k=1}^{8}k^2$$
$$=3\times\frac{8\times9\times17}{6}$$
$$=612$$

답 612

21

밑면의 반지름의 길이가 30이고 높이가 $10\sqrt{7}$이므로

원뿔의 모선의 길이는

$\sqrt{30^2+(10\sqrt{7})^2}=\sqrt{900+700}=\sqrt{1600}=40$

그림과 같이 원뿔의 전개도를 그리고 부채꼴 OCD에서 호 CD의 중점을 E라 하면 점 B는 선분 OE 위에 있다.

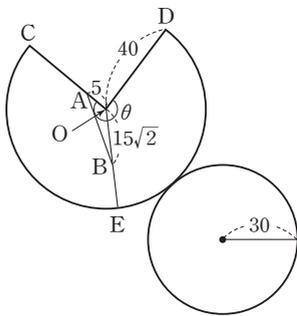
또 부채꼴 OCD에서 중심각의 크기를 θ, 호 CD의 길이를 l이라 하면

$l=40\times\theta$이고,

l은 원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$40\times\theta=2\times\pi\times30$

$\theta=\frac{60}{40}\pi=\frac{3}{2}\pi$

따라서 $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\theta}{2}=\frac{3}{4}\pi$

그러므로 구하는 최단거리는 삼각형 OAB에서 선분 AB의 길이와 같으므로 코사인법칙으로부터

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=5^2+(15\sqrt{2})^2-2\times5\times15\sqrt{2}\times\cos\frac{3}{4}\pi$$
$$=25+450-2\times5\times15\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=25+450+150$$
$$=625$$

$\overline{\mathrm{AB}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{625}=25$

답 25

22

$y=x^3-a^2x+a^3$에서 $y'=3x^2-a^2$

접점을 $(t, t^3-a^2t+a^3)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-(t^3-a^2t+a^3)=(3t^2-a^2)(x-t)$, 즉

$y=(3t^2-a^2)x-2t^3+a^3$

이 접선이 점 $\mathrm{P}(b, 0)$을 지나므로

$(3t^2-a^2)b-2t^3+a^3=0$, 즉

$2t^3-3bt^2+a^2b-a^3=0$ …… ㉠

(i) 점 P에서 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$에 그은 접선이 세 개일 때 ㉠은 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(t)=2t^3-3bt^2+a^2b-a^3$이라 하면

$f'(t)=6t^2-6bt=6t(t-b)$

$b>0$이므로 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(t)$	+	0	−	0	+
$f(t)$	↗	$f(0)$	↘	$f(b)$	↗

함수 $y=f(t)$의 그래프가 t축과 만나는 점의 개수가 3이어야 하므로 $f(0)>0$이고 $f(b)<0$이어야 한다.

$f(0)=a^2b-a^3=a^2(b-a)>0$에서

$0<a<b\le15$ …… ㉡

$f(b)=-b^3+a^2b-a^3=-b(b^2-a^2)-a^3$이고 ㉡이 성립하면

$f(b)<0$이다.

그러므로 ㉡을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)는

$(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $\cdots$, $(1, 13)$, $(1, 14)$, $(1, 15)$,

$(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $\cdots$, $(2, 14)$, $(2, 15)$,

$(3, 4)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$, $\cdots$, $(3, 15)$,

⋮

$(12, 13)$, $(12, 14)$, $(12, 15)$,

$(13, 14)$, $(13, 15)$,

$(14, 15)$

이므로 그 개수는

$p=1+2+3+\cdots+14=\frac{14\times(1+14)}{2}=105$

(ii) 점 P에서 곡선 $y=x^3-a^2x+a^3$에 그은 접선이 두 개일 때

㉠은 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f(0)=0$ 또는 $f(b)=0$이어야 한다.

① $f(0)=0$인 경우

$f(0)=a^2b-a^3=a^2(b-a)=0$에서

$b=a$ …… ㉢

㉢을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $\cdots$, $(14, 14)$, $(15, 15)$

이므로 그 개수는 15이다.

② $f(b)=0$인 경우

$f(b)=-b^3+a^2b-a^3$에서

$b>a>0$일 때, $-b^3+a^2b-a^3=-b(b^2-a^2)-a^3<0$

$a\ge b>0$일 때, $-b^3+a^2b-a^3=-b^3+a^2(b-a)<0$

이므로 $f(b)=0$일 수 없다.

①, ②에서 $q=15$

따라서 $p+q=105+15=120$

답 120

23

확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{8}\right)$을 따르므로

$E(X)=n\times\frac{1}{8}=4$

따라서 $n=32$

답 ②

24

${}_{n}H_{6}={}_{n+6-1}C_{6}={}_{n+5}C_{6}$이고 ${}_{9}C_{3}={}_{9}C_{6}$이므로

$n+5=9$에서 $n=4$

따라서 ${}_{4}H_{3}={}_{4+3-1}C_{3}={}_{6}C_{3}=20$

답 ③

25

$P(A^{C}\cup B^{C})=P((A\cap B)^{C})$

$=1-P(A\cap B)$

이므로

$P(A\cap B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

따라서

$P(A)=P(A\cap B^{C})+P(A\cap B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{2}$

답 ①

26

이 과수원에서 생산되는 포도 1송이의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(450, 12^{2})$을 따른다.

$Z=\frac{X-450}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(X\le 474)=P\left(Z\le\frac{474-450}{12}\right)$

$=P(Z\le 2)$

$=0.5+P(0\le Z\le 2)$

$=0.5+0.4772$

$=0.9772$

답 ④

27

5개의 문자 C, L, T, R, E를 각각 같은 문자 O로 생각하여 7개의 문자 OUOOUOO를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{5!2!}=21$

이 각각의 경우에 대하여 앞에서부터 두 개의 O를 차례로 C, L 또는 L, C로 바꾸고, 뒤에서부터 두 개의 O를 차례로 R, E 또는 E, R로 바꾼 다음 가운데 있는 O를 T로 바꾸면 조건을 만족시키는 문자열을 만들 수 있다.

따라서 구하는 경우의 수는

$21\times 2!\times 2!=84$

답 ⑤

28

5번째 시행 후 상자 안에 들어 있는 검은 공의 개수가 6인 경우는 3의 배수의 눈이 3의 배수가 아닌 눈보다 1번 더 많이 나와야 하므로 3의 배수의 눈이 3번, 3의 배수가 아닌 눈이 2번 나와야 한다.

5번째 시행 후 처음으로 상자 안에 들어 있는 검은 공의 개수가 6이 되므로 4번째 시행 후에 검은 공의 개수가 5이고 3번째 시행 후에 검은 공의 개수는 4이어야 한다.

따라서 3번째 시행까지 3의 배수의 눈이 1번, 3의 배수가 아닌 눈이 2번 나오고, 4번째, 5번째 시행에서 모두 3의 배수의 눈이 나와야 한다.

이때 첫 번째 시행에서 3의 배수의 눈이 나오면 검은 공이 6개가 되므로 이 경우는 제외하여야 한다.

3의 배수의 눈이 나오는 경우를 ○, 3의 배수가 아닌 눈이 나오는 경우를 ×로 나타내면 구하는 경우는 다음과 같다.

×○×○○, ××○○○

따라서 구하는 확률은

$2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{8}{243}$

답 ①

29

$1\le f(1)\le f(3)\le f(5)\le 6$이므로

$f(1)\le f(3)\le f(5)$를 만족시키는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_{6}H_{3}={}_{6+3-1}C_{3}={}_{8}C_{3}=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}=56$

또한 $6\ge f(2)>f(4)>f(6)\ge 1$이므로

$f(2)>f(4)>f(6)$을 만족시키는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 서로 다른 3개를 택하는 조합의 수이므로

${}_{6}C_{3}=\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}=20$

따라서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수 a는

$a=56\times 20=1120$

이므로

$\frac{a}{10}=112$

답 112

30

모표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 49인 표본의 표본평균의 값을 $\overline{x_1}$이라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{49}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{49}}$

이므로

$b-a=2\times1.96\times\frac{5}{7}=2.8$

같은 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균의 값을 $\overline{x_2}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

이므로

$d-c=2\times2.58\times\frac{5}{\sqrt{n}}=\frac{25.8}{\sqrt{n}}$

$\frac{d-c}{b-a}=\frac{\frac{25.8}{\sqrt{n}}}{2.8}=\frac{129}{14\sqrt{n}}$이므로

$\frac{43}{28}<\frac{d-c}{b-a}<\frac{43}{14}$에서

$\frac{43}{28}<\frac{129}{14\sqrt{n}}<\frac{43}{14}$

$\frac{1}{6}<\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{3}$이므로

$3<\sqrt{n}<6$

$9<n<36$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 10, 11, 12, $\cdots$, 35이므로 모든 자연수 n의 값의 합은

$10+11+12+\cdots+35=\frac{26(10+35)}{2}$

$=585$

답 585

실전 모의고사 5회

본문 162~168쪽

01 ②	02 ①	03 ②	04 ①	05 ①
06 ③	07 ①	08 ④	09 ⑤	10 ③
11 ⑤	12 ④	13 ②	14 ③	15 ③
16 55	17 32	18 12	19 30	20 424
21 12	22 150	23 ⑤	24 ③	25 ④
26 ①	27 ②	28 ⑤	29 217	30 243

01

$(2\sqrt{2})^{-3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(2\times2^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}\times(2^{-2})^{-2}$

$=2^{-3}\times2^{-\frac{3}{2}}\times2^{4}$

$=2^{-3-\frac{3}{2}+4}$

$=2^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ②

02

$f'(x)=(2x-x^2)'\times(x+2)+(2x-x^2)\times(x+2)'$

$=(2-2x)(x+2)+(2x-x^2)$

이므로

$f'(1)=0+1=1$

답 ①

03

함수 $f(x)=a^{1-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-1}$에서 $\frac{1}{a}>1$ $(0<a<1)$이므로

x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값도 증가한다.

$2\le x\le4$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 4를 가지므로

$f(2)=\frac{1}{a}=4$

즉, $a=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=4^{x-1}$이므로

$a\times f(3)=\frac{1}{4}\times4^2=4$

답 ②

04

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x=1$에서의 우극한은 2이고

함수 $y=f(-x)$의 그래프에서 $x=0$에서의 우극한은

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x=0$에서의 좌극한이므로 -1이다.

따라서 $\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to0+}f(-x)=2\times(-1)=-2$

답 ①

05

$\sum_{k=1}^{n}(3k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}(3k-2)^2$

$=\{4^2+7^2+10^2+\cdots+(3n+1)^2\}-\{1^2+4^2+7^2+\cdots+(3n-2)^2\}$

$=(3n+1)^2-1=360$

$(3n+1)^2=361$

n은 자연수이므로 $3n+1=19$

따라서 $n=6$

답 ①

다른 풀이

$\sum_{k=1}^{n}(3k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}(3k-2)^2=\sum_{k=1}^{n}\{(3k+1)^2-(3k-2)^2\}$

$=\sum_{k=1}^{n}(18k-3)$

$=18\times\frac{n(n+1)}{2}-3n$

$=9n^2+6n=360$

$3n^2+2n-120=0$

$(3n+20)(n-6)=0$

n은 자연수이므로 $n-6=0$

따라서 $n=6$

06

$2(\cos x-1)^2-3=\sin x-4\cos x$

$2\cos^2 x-4\cos x+2-3=\sin x-4\cos x$

$2\cos^2 x-\sin x-1=0$

$2(1-\sin^2 x)-\sin x-1=0$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=-1$

즉, $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$

답 ③

07

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$이다.

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(3x^2-x+2a)=3-1+2a=2a+2$

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(-x+3a)=3a-1$

$f(1)=3a-1$이므로 $2a+2=3a-1$에서

$a=3$

$f(x)=\begin{cases}3x^2-x+6 & (x<1)\\ -x+9 & (x\ge 1)\end{cases}$

이므로

$f(1)=-1+9=8$

따라서 $a+f(1)=3+8=11$

답 ①

08

$f(x)=x^3-3x^2-6x+10$에서

$f'(x)=3x^2-6x-6$

$f'(-1)=3$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(-1, 12)$에서의 접선 l_1의 방정식은

$y-12=3(x+1)$, 즉 $3x-y+15=0$

두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하므로 $f'(a)=f'(-1)=3$에서

$3a^2-6a-6=3$

$3(a+1)(a-3)=0$

$a\ne-1$이므로 $a=3$이고 $f(a)=-8$

점 A와 직선 l_2 사이의 거리는 점 $B(3, -8)$과 직선 l_1 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$\frac{|3\times3-(-8)+15|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{32}{\sqrt{10}}=\frac{16\sqrt{10}}{5}$

답 ④

09

두 점 A, B의 좌표가 각각 $(1, 0)$, $(0, 1)$이므로 정사각형 OACB의 넓이는 1이다.

두 함수 $y=a^x$과 $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이므로 점 D의 좌표가 $(1, a)$이고 점 E의 좌표는 $(a, 1)$이다.

정사각형 CEFD에서 $\overline{CD}=\overline{CE}=a-1$이므로 그 넓이는

$(a-1)^2$

두 정사각형 OACB와 CEFD의 넓이의 비가 1: 4이므로

$1 : (a-1)^2=1 : 4$에서

$(a-1)^2=4$, $a-1=\pm2$

$a>1$이므로 $a=3$

즉, 점 E의 x좌표가 3이므로 점 G의 좌표는 $(3, 3^3)$이고 점 H는 직선 $y=x$에 대하여 점 G와 대칭이므로 점 H의 좌표는 $(3^3, 3)$이다.

따라서 두 점 G, H를 지나는 직선의 방정식은

$y=-(x-3)+3^3$

$y=-x+30$ ...... ㉠

따라서 두 점 G, H를 지나는 직선 ㉠이 x축과 만나는 점 I의 좌표는 $(30, 0)$이므로 삼각형 AIH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(30-1)\times3=\frac{87}{2}$

답 ⑤

10

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $F'(x)=f(x)$이고

조건 (가)에서 $F(x)$는 $x=0$에서 극값을 가지므로 $F'(0)=f(0)=0$이다.

조건 (나)에서 $f(x)=0$인 x가 0 이외에 하나 존재하고 조건 (가)에서 $F(x)$는 $x=0$에서만 극값을 가지므로

$f(x)=x(x-a)^2\ (a\ne0)$

$F(1)-F(-1)=\int_0^1 f(t)dt-\int_0^{-1} f(t)dt$

$=\int_{-1}^1 f(t)dt$

$=\int_{-1}^{1} t(t-a)^2 dt$

$=\int_{-1}^{1} (t^3-2at^2+a^2t)\,dt$

$=\int_{-1}^{1} (-2at^2)\,dt$

$=2\times\int_{0}^{1} (-2at^2)\,dt$

$=2\times\left[-\frac{2}{3}at^3\right]_0^1$

$=-\frac{4}{3}a=-4$

에서 $a=3$이므로

$f(x)=x(x-3)^2=x^3-6x^2+9x$

따라서

$F(2)=\int_{0}^{2} f(t)\,dt=\int_{0}^{2} (t^3-6t^2+9t)\,dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4-2t^3+\frac{9}{2}t^2\right]_0^2$

$=4-16+18=6$

답 ③

11

주어진 그림의 각 단계에서

$a_1=1+1$

$a_2=(1+2)+2\times2$

$a_3=(1+2+3)+3\times3$

$a_4=(1+2+3+4)+4\times4$

⋮

이므로

$a_n=\sum_{k=1}^{n}k+n^2=\frac{n(n+1)}{2}+n^2=\frac{3n^2+n}{2}$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}\frac{3k^2+k}{2}$

$=\frac{3}{2}\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{10\times11}{2}$

$=\frac{1155}{2}+\frac{55}{2}=605$

답 ⑤

12

함수 $g(x)$는 삼차함수이고 $g(-1)=g'(-1)=0$이므로

$g(x)=(x+1)^2(ax+b)$ ($a\neq0$, a, b는 상수)

라 할 수 있다.

주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $g(0)=-4$이므로

$b=-4$

$g(x)=(x+1)^2(ax-4)$

$=ax^3+2(a-2)x^2+(a-8)x-4$

$g'(x)=3ax^2+4(a-2)x+a-8$이므로 $g'(1)=-8$에서

$3a+4(a-2)+a-8=-8$

$8a-16=-8$, $a=1$

$g'(x)=3x^2-4x-7$

한편, 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)-9$이므로

$f(3)=g'(3)+9=3\times3^2-4\times3-7+9=17$

답 ④

13

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=5$, (우변)$=5$이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{(2m+1)!}{m!}-1$

이다. $n=m+1$일 때,

$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$

$=\frac{(2m+1)!}{m!}-1+\frac{\boxed{\{4(m+1)+1\}\times\{2(m+1)\}!}}{2\times(m+1)!}$

$=\frac{2(m+1)(2m+1)!}{2\times(m+1)!}+\frac{(4m+5)(2m+2)!}{2\times(m+1)!}-1$

$=\frac{\{(m+1)+(4m+5)(m+1)\}(2m+1)!}{(m+1)!}-1$

$=\frac{\boxed{(2m+3)(2m+2)}\times(2m+1)!}{(m+1)!}-1$

$=\frac{\{2(m+1)+1\}!}{(m+1)!}-1$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{(2n+1)!}{n!}-1$

이다.

$f(m)=\{4(m+1)+1\}\times\{2(m+1)\}!$, $g(m)=(2m+3)(2m+2)$

이므로

$f(1)+g(2)$

$=\{4\times(1+1)+1\}\times\{2\times(1+1)\}!+(2\times2+3)\times(2\times2+2)$

$=9\times4!+7\times6$

$=216+42=258$

답 ②

14

$f(t)=2t^3$, $g(t)=3t^2+12t$라 하자.

ㄱ. $t=2$일 때 두 점 P, Q가 움직인 거리는 각각

$f(2)=16=5\times3+1$, $g(2)=36=5\times7+1$

이므로 두 점 P, Q는 모두 점 B에서 점 A 방향으로 움직인다.

따라서 두 점 P, Q의 운동 방향은 같다. (참)

ㄴ. 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나는 경우는 두 점 P, Q가 움직인 거리의 차가 $10n$ (n은 정수)인 경우이다.

$h_1(t)=f(t)-g(t)=2t^3-3t^2-12t$라 하면

$h_1'(t)=6t^2-6t-12=6(t+1)(t-2)$

이므로 $0<t<2$에서 $h_1'(t)<0$이고 $h_1(t)$는 감소한다.

$h_1(0)=0$, $h_1(2)=-20$이므로 $h_1(t)$의 값이 -10, -20일 때 두 점 P, Q가 움직인 거리의 차는 각각 10, 20이다.

이때 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나고, 만나는 횟수는 2이다. (참)

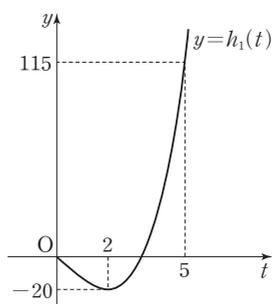
ㄷ. 두 점 P, Q가 만나는 경우는 두 점이 같은 방향으로 움직이면서 만나는 경우와 반대 방향으로 움직이면서 만나는 경우, 선분의 양 끝 점에서 만나는 경우가 있다.

(i) 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나는 경우

ㄴ과 마찬가지로 두 점 P, Q가 움직인 거리의 차가 $10n$ (n은 정수)인 경우이다.

$h_1(t)=f(t)-g(t)=2t^3-3t^2-12t$라 하면

$h_1'(t)=6t^2-6t-12=6(t+1)(t-2)$에서

$t=2$일 때 $h_1(t)$는 극소이다.

$h_1(0)=0$, $h_1(2)=-20$, $h_1(5)=115$

$0<t\le2$에서 $h_1(t)=10n_1$ (n_1은 정수)인 t의 값은 2개이고

$2<t\le5$에서 $h_1(t)=10n_2$ (n_2는 정수)인 t의 값은 13개이므로

$0<t\le5$일 때 두 점 P, Q가 같은 방향으로 움직이면서 만나는 횟수는 15이다.

(ii) 두 점 P, Q가 반대 방향으로 움직이면서 만나는 경우

두 점 P, Q가 움직인 거리의 합이 $10n$ (n은 정수)인 경우이다.

$h_2(t)=f(t)+g(t)=2t^3+3t^2+12t$라 하면

$h_2'(t)=6t^2+6t+12=6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{21}{2}$

에서 $t>0$일 때 $h_2'(t)>0$이므로 $h_2(t)$는 증가한다.

$h_2(0)=0$, $h_2(5)=385$이므로 $0<t\le5$일 때

$h_2(t)=10n_3$ (n_3은 정수)인 t의 값은 38개이다.

즉, $0<t\le5$일 때 두 점 P, Q가 반대 방향으로 움직이면서 만나는 횟수는 38이다.

(iii) 두 점 P, Q가 양 끝 점에서 만나는 경우

두 점 P, Q가 선분의 양 끝 점에서 만나기 위해서는 $f(t)$, $g(t)$가 모두 5의 배수이고, $f(t)-g(t)$와 $f(t)+g(t)$ 모두 $10n$ (n은 정수)이어야 한다.

이 경우 (i)과 (ii)를 모두 만족시켜야 하므로 위의 경우에 중복으로 포함되어 있다.

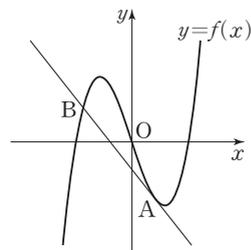
(i), (ii), (iii)에서 $0<t\le5$일 때 두 점 P, Q가 만나는 횟수는

$15+38=53$ 이하이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

15

$a\ne0$일 때 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(g(a),\ f(g(a)))$라 하면 두 점 A, B는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이고, $\frac{f(a)-f(g(a))}{a-g(a)}$는 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기이다.

$f'(x)=3x^2+k$이므로 직선 AB의 방정식은

$y=(3a^2+k)(x-a)+a^3+ka$

이고, 두 점 A, B의 x좌표는 방정식

$x^3+kx=(3a^2+k)(x-a)+a^3+ka$ …… ㉠

의 실근이다. ㉠을 정리하면

$x^3-3a^2x+2a^3=0$

$(x+2a)(x-a)^2=0$

$x=-2a$ 또는 $x=a$

즉, $g(a)=-2a$ 또는 $g(a)=a$

이때 0이 아닌 실수 a에 대하여 $g(a)\ne a$이므로

$g(a)=-2a$, 즉 $g(x)=-2x$ …… ㉡

$f'(g(x))=f'(-2x)=12x^2+k$

$f'(x)\times f'(g(x))=k^2$에서

$(3x^2+k)\times(12x^2+k)=k^2$

$36x^4+15kx^2=0$, $3x^2(12x^2+5k)=0$

이차방정식 $12x^2+5k=0$의 두 근의 곱이 $-\frac{5}{4}$이므로

$\frac{5k}{12}=-\frac{5}{4}$, $k=-3$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$g(-3)=-2\times(-3)=6$

답 ③

16

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_{10}+a_{20}=50$에서

$a+9d+a+19d=50$

$a+14d=25$ …… ㉠

$a_{10}-a_{20}=30$에서

$a+9d-(a+19d)=30$

$-10d=30$에서 $d=-3$

$d=-3$을 ㉠에 대입하면 $a=67$

따라서 $a_5=a+4d=67+4\times(-3)=55$

답 55

17

$f(x)=(x+2)(x^2-2x+4)$라 하면

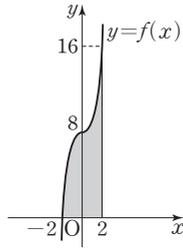
$x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0$이므로

$f(x)=0$에서 $x=-2$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점 $(-2,\ 0)$에서 만난다.

한편 $(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+8$이므로

$f(x)=x^3+8$에서 $f'(x)=3x^2\ge0$

즉, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{2}(x+2)(x^2-2x+4)\,dx=\int_{-2}^{2}(x^3+8)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}8\,dx=8\times4=32$$

답 32

18

조건 (가)에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3$이므로

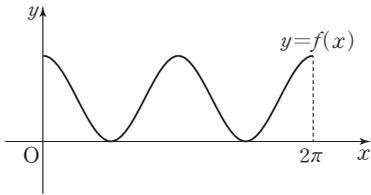
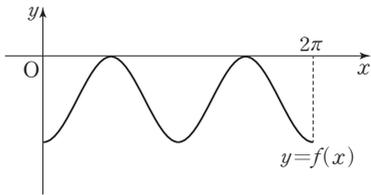
$a\cos\frac{2}{3}\pi+b=3$

즉, $-\frac{1}{2}a+b=3$ …… ㉠

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=a\cos 2x$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이다. 즉, $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 2이려면 다음과 같이

(ⅰ) $a>0$이고 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이거나

(ⅱ) $a<0$이고 함수 $f(x)$의 최댓값이 0이어야 한다.

(ⅰ) $a>0$이고 함수 $f(x)$의 최솟값이 0인 경우

(ⅱ) $a<0$이고 함수 $f(x)$의 최댓값이 0인 경우

조건 (가)에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3>0$이므로 $a>0$이고 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이다.

즉, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로 $-a+b=0$에서

$a=b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=b=6$

따라서 $a+b=6+6=12$

답 12

19

$f(x)=2x^3+ax^2-12x+b$에서

$f'(x)=6x^2+2ax-12$이고 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$f'(1)=6+2a-12=0$

에서 $a=3$

$f(1)=10$이므로

$f(1)=2+3-12+b=10$

에서 $b=17$

따라서 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+17$이므로

$f(-1)=-2+3+12+17=30$

답 30

20

$S_{15}=S_{10}$에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{13}+a_{14}+a_{15}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$

이므로

$a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=0$ …… ㉠

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 정수인 공차를 d라 하면

$(a_1+10d)+(a_1+11d)+(a_1+12d)+(a_1+13d)+(a_1+14d)=0$

에서 $a_1+12d=0$

$a_n+25>0$을 만족시키는 n의 최댓값이 19이므로

$a_1+18d+25>0\ge a_1+19d+25$

$6d+25>0\ge 7d+25$에서 $d=-4$

㉠에서

$a_{13}=0$이므로

$a_1+(13-1)\times(-4)=0$에서 $a_1=48$

따라서 $a_n=48+(n-1)\times(-4)=-4n+52$이므로

$\sum_{k=1}^{20}|a_k|$

$=\sum_{k=1}^{12}(-4k+52)+a_{13}+\sum_{k=14}^{20}(4k-52)$

$=(48+44+40+\cdots+8+4)+0+(4+8+12+\cdots+24+28)$

$=\frac{12}{2}(48+4)+\frac{7}{2}(4+28)$

$=424$

답 424

21

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}\times12\times5=30$이므로 삼각형 ADE의 넓이는 15이다.

(삼각형 ADE의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\sin A=15$ …… ㉠

또한 삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\cos A$ …… ㉡

한편, 삼각형 ABC에서 $\sin A=\frac{5}{13}$, $\cos A=\frac{12}{13}$이다.

㉠에서 $\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\frac{5}{13}=15$이므로

$\overline{AD}\times\overline{AE}=78$ …… ㉢

㉡에서

$\overline{DE}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\frac{12}{13}$

$=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-144$

$=(\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{AE}})^2+2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AE}}-144$

$=(\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{AE}})^2+12$ (㉢에 의하여)

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}$일 때, $\overline{\mathrm{DE}}$는 최솟값 $2\sqrt{3}$을 갖는다.

$m=2\sqrt{3}$이므로 $m^2=12$

답 12

22

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값 a_n은 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 극댓값과 두 함숫값 $f(-1)$, $f(3)$ 중에서 가장 큰 값이다.

$f(0)=0$, $f'(x)=x(1-x^n)$

$$f(x)=\int_0^x t(1-t^n)dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{n+2}t^{n+2}\right]_0^x=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{n+2}x^{n+2}$$

(i) n이 홀수일 때

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이고,

$$f(-1)=\frac{1}{2}\times(-1)^2-\frac{1}{n+2}\times(-1)^{n+2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}$$

$$f(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}$	↘	0	↗	$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$	↘	$f(3)$

따라서 n이 홀수일 때 $f(-1)>f(1)>f(3)$이므로

$$a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}$$

(ii) n이 짝수일 때

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$이고,

$$f(-1)=\frac{1}{2}\times(-1)^2-\frac{1}{n+2}\times(-1)^{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

$$f(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$	↘	0	↗	$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$	↘	$f(3)$

따라서 n이 짝수일 때 $f(-1)=f(1)>f(3)$이므로

$$a_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

(i), (ii)에서 $a_n=\frac{1}{2}-\frac{(-1)^n}{n+2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}4(n+2)a_n=\sum_{n=1}^{10}\{2(n+2)-4(-1)^n\}$$

$$=\sum_{n=1}^{10}2n+\sum_{n=1}^{10}4-\sum_{n=1}^{10}4(-1)^n$$

$$=2\times\frac{10\times11}{2}+4\times10-4\times0=150$$

답 150

23

확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{8}+a+\frac{1}{6}=1$$

$$a=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$$

따라서

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{8}+3\times\frac{17}{24}+5\times\frac{1}{6}=\frac{37}{12}$$

답 ⑤

24

자연수 n에 대하여 다항식 $(1+x)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r x^r 1^{n-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, n)$

x^3의 계수는 $r=3$이고 $n\geq3$일 때이므로

${}_n\mathrm{C}_3$

주어진 다항식의 x^3의 계수는

${}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_3$

이때 ${}_3\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_4$이고

${}_n\mathrm{C}_r+{}_n\mathrm{C}_{r+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$ $(0\leq r\leq n-1)$

이므로 주어진 식의 값은

${}_4\mathrm{C}_4+{}_4\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_3$

$={}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_3$

$={}_6\mathrm{C}_4+{}_6\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_3$

$\vdots$

$={}_{10}\mathrm{C}_4+{}_{10}\mathrm{C}_3$

$={}_{11}\mathrm{C}_4=330$

답 ③

다른 풀이

주어진 다항식은 첫째항이 1이고 공비가 $x+1$인 등비수열의 합과 같으므로

$$(\text{주어진 식})=\frac{(x+1)^{11}-1}{(x+1)-1}$$

$$=\frac{(x+1)^{11}-1}{x}\ (x\neq0)$$

주어진 다항식의 x^3의 계수는 $(x+1)^{11}$의 전개식에서 x^4의 계수와 같다.

이때 $(x+1)^{11}$의 전개식에서 일반항은

${}_{11}\mathrm{C}_r x^r 1^{11-r}$ $(r=0, 1, 2, 3, \cdots, 11)$

따라서 구하는 x^4의 계수는 $r=4$이어야 하므로

$${}_{11}\mathrm{C}_4=\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$$

25

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50, 6^2)$을 따르므로 확률변수 X의 확률밀도함수는 $x=50$일 때 최대이고 그 그래프는 직선 $x=50$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이다.

따라서 $\mathrm{P}(a\leq X\leq a+4)$의 값이 최대가 되기 위해서는 X의 값의 범

위의 양 끝값인 a, $a+4$의 평균이 50이어야 한다.

즉, $\frac{a+(a+4)}{2}=50$이므로

$a=48$

답 ④

26

$P(A)=2P(B)$, $P(A)P(B^C)=\frac{5}{18}$에서

$2P(B)\{1-P(B)\}=\frac{5}{18}$

$36\{P(B)\}^2-36P(B)+5=0$

$\{6P(B)-1\}\{6P(B)-5\}=0$

$P(B)=\frac{1}{6}$ 또는 $P(B)=\frac{5}{6}$

그런데 $0\le P(A)\le 1$이어야 하므로 $P(B)=\frac{1}{6}$일 때

$P(A)=2P(B)=\frac{1}{3}$

따라서 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ①

27

직사각형 모양의 도형에 써넣은 문자의 위치가 좌우 대칭이 되려면 오른쪽 그림에서 색칠한 2개의 정사각형에 서로 같은 문자를 써넣어야 한다.

M		M
(색칠)		(색칠)
M		M
M		M

나머지 비어 있는 4개의 정사각형에 문자 A와 문자 T 중에서 한 문자를 써넣는 경우의 수는

${}_2\Pi_4$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times{}_2\Pi_4=2\times 2^4=32$

답 ②

28

한 번의 시행에서 주머니에서 꺼낸 공에 적힌 수가 1일 확률은 $\frac{1}{3}$, 2일 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

기록된 5개의 수의 합이 8 이상인 경우는 $(1, 1, 2, 2, 2)$, $(1, 2, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 2, 2)$의 3가지이다.

(ⅰ) 1이 적힌 공이 2번, 2가 적힌 공이 3번 나올 확률은

$${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{3^5}$$

(ⅱ) 1이 적힌 공이 1번, 2가 적힌 공이 4번 나올 확률은

$${}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{3^5}$$

(ⅲ) 2가 적힌 공이 5번 나올 확률은

$${}_5C_0\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{3^5}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$$\frac{80}{3^5}+\frac{80}{3^5}+\frac{32}{3^5}=\frac{192}{3^5}=\frac{64}{81}$$

답 ⑤

29

모표준편차가 15인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균의 값을 $\bar{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\times\frac{15}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{15}{\sqrt{n}}$$

이때

$$b-a=2\times1.96\times\frac{15}{\sqrt{n}}\le 4$$

에서

$$\sqrt{n}\ge\frac{2\times1.96\times15}{4}=14.7$$

$n\ge 14.7^2=216.09$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 217이다.

답 217

30

조건 (가)에서 빨간 공 4개를 서로 다른 2개의 주머니에 각각 1개, 3개를 넣는 경우와 2개, 2개를 넣는 경우로 나누어 생각한다.

(ⅰ) 빨간 공 4개를 서로 다른 2개의 주머니에 각각 1개, 3개를 넣는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

빨간 공이 담긴 2개의 주머니에 파란 공과 노란 공을 각각 1개씩 넣고 남은 파란 공 2개와 노란 공 2개를 주머니 A, B, C에 넣는 경우의 수는

${}_3H_2\times{}_3H_2=36$

이때 빨간 공이 담겨 있지 않은 1개의 주머니가 비어 있는 경우의 수는 남은 파란 공 2개와 노란 공 2개를 빨간 공이 담긴 2개의 주머니에 모두 넣는 경우의 수와 같으므로

${}_2H_2\times{}_2H_2=9$

그러므로 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$6\times(36-9)=162$

(ⅱ) 빨간 공 4개를 서로 다른 2개의 주머니에 각각 2개, 2개를 넣는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

빨간 공이 담긴 2개의 주머니에 파란 공과 노란 공을 각각 1개씩 넣고 남은 파란 공 2개와 노란 공 2개를 서로 다른 3개의 주머니 A, B, C에 넣는 경우의 수는

${}_3H_2\times{}_3H_2=36$

이때 빨간 공이 담겨 있지 않은 1개의 주머니가 비어 있는 경우의

수는 남은 파란 공 2개와 노란 공 2개를 빨간 공이 담긴 2개의 주머니에 모두 넣는 경우의 수와 같으므로

${}_2H_2 \times {}_2H_2=9$

그러므로 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$3\times(36-9)=81$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$162+81=243$

답 243

다른 풀이

빨간 공을 넣는 주머니를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

택하여진 주머니에 빨간 공을 각각 1개씩 넣고 남은 빨간 공 2개를 넣는 경우의 수는

${}_2H_2=3$

빨간 공이 들어 있는 두 주머니에 파란 공, 노란 공을 각각 1개씩 넣고 남은 2개씩을 세 주머니에 넣는 경우의 수는

${}_3H_2 \times {}_3H_2=6\times 6=36$ ...... ㉠

㉠의 경우 중에 빨간 공이 들어 있지 않은 주머니가 비어 있는 경우의 수는

${}_2H_2 \times {}_2H_2=3\times 3=9$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times 3\times(36-9)=243$